

# کلاس درس و تست آنلاین معادلات دیفرانسیل



مدرس: مسعود آقاسی

[@math\\_equation](https://www.instagram.com/math_equation)

[@aghasi\\_equation1](https://www.instagram.com/aghasi_equation1)

[www.m-aghasi.com](http://www.m-aghasi.com)

[masoudaghasi1395@gmail.com](mailto:masoudaghasi1395@gmail.com)

منبع لازم برای کلاس درس و تست آنلاین  
معادلات دیفرانسیل کنکور ارشد و دکتری ۱۴۰۲



معادلات دیفرانسیل - جلد ۱

لینک خرید اینترنتی : <https://b2n.ir/660229>

فصل ۱: مقدمات

تعریف های مقدماتی

متغیر مستقل  $y = y(x)$  تابع مجهول  
 $y' = \frac{dy}{dx}$  ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$  یک متغیره

تعریف: هر رابطه بین تابع مجهول و متغیر مستقل و مشتقات تابع مجهول نسبت به مستقل، معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

تعریف: بیشترین مرتبه مشتق تابع مجهول مرتبه معادله نامیده می شود.

۱) معادله خطی: هر معادله ای که به فرم زیر باشد، خطی نامیده می شود.  

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (*)$$
 انواع معادله دیفرانسیل

۲) معادله غیر خطی: هر معادله ای که به فرم (\*) نباشد.  
 ل  $y'$  و  $y''$  و ..... شامل عملگر غیر خطی (sin, ln, توان...) باشد

انواع معادلات خطی  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow$  همگن  
 $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow$  غیر همگن

مثال. نمونه‌های از معادله دیفرانسیل:

الف)  $xy'' + 4y' + (\sin x)y = 0$   $f(x) = 0$

ب)  $y''' + 2e^x y' - 4y = \tan x$   $f(x) \neq 0$

ج)  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \sin x$

معادله مرتبه دوم، خطی، همگن  
 معادله مرتبه سوم، خطی، غیرهمگن  
 معادله مرتبه دوم، غیرخطی

↓ عملگر غیرخطی

تعریف: به تابعی که در یک معادله دیفرانسیل صدق کند، **جواب** آن معادله نامیده می‌شود.

تعریف: به جوابی از یک معادله مرتبه  $n$  که  $n$  پارامتر  $C_1, C_2, \dots, C_n$  دارد، **جواب عمومی** نامیده می‌شود.

تعریف: با مقداردهی به پارامترها در جواب عمومی، یک جواب حاصل می‌گردد که **جواب خاص (جواب خصوصی)** نامیده می‌شود.

↓ شرط اولیه (شرط مرزی)

مثال. آیا  $y = e^{2x}$  جواب معادله  $y'' - 4y = 0$  است؟ مرتبه ۲، خطی، همگن

آیا  $y = e^{2x}$  در معادله صدق می‌کند؟ (در معادله جایگذاری کنید!!)

$y = e^{2x}$  جواب است  $\Rightarrow$  طرف دوم =  $4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$  جواب معادله است  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

پارامتر (متغیری به جز  $x$  و  $y$ )

جواب عمومی  $\Rightarrow$  مرتبه = ۲ = تعداد پارامتر

(رشته منحنی) بی نهایت جواب خانواده منحنی

$y(0) = -\sqrt{2}$  و  $y'(0) = 5$  : شرط اولیه (مقدار  $y$  و  $y'$  و ... در یک  $x$  مشترک)

$y(0) = 10$  و  $y'(1) = 5$  : شرط مرزی (مقدار  $y$  و ... در  $x$  های متفاوت)

**تشکیل معادله دیفرانسیل**

مهم!!

اگر یک خانواده منحنی شامل  $n$  پارامتر  $c_1, c_2, \dots, c_n$  داشته باشیم برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن، از خانواده منحنی

$n$  بار مشتق نسبت به مستقل می‌گیریم و بین معادلات حاصل  $c_1, c_2, \dots, c_n$  حذف کنیم (معادله مرتبه  $n$ )

نکته: معادله دیفرانسیل، منحنی  $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$  عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & y \\ f'(x) & g'(x) & y' \\ f''(x) & g''(x) & y'' \end{vmatrix} = 0$$

ترکیب خطی

مثال. (تست ۱۰ صفحه ۱۷ جلد اول) معادله دیفرانسیل سهمی‌های به معادله  $y = cx^2 + d$  کدام است؟

(ژئوفیزیک ۷۶، مکانیک - آزاد ۸۲)

$y$ : تابع  $x$ : مستقل

(۲)  $y'' + (x^2 - 2x)y' - y = 0$

(۱)  $x^2 y'' - 2xy' + y = 0$

(۴)  $2xy'' - x^2 y' + y = 0$

(۳)  $xy'' - y' = 0$

روشن اول.

$y''$  و  $y'$  و  $y$  مرتبه دوم  $\Rightarrow$  تعداد  $2 \Rightarrow c, d$  پارامترها

$$\begin{cases} y = cx^2 + d \\ y' = 2cx \\ y'' = 2c \end{cases}$$

حذف  $c \rightarrow y' = y'' x \Rightarrow x y'' - y' = 0$  (۳) ✓

نکته  $\Rightarrow$  یکتایی  $x^2$  است  $\Rightarrow f(x)=x^2, g(x)=1 \Rightarrow$  روش نو

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & y \\ 0 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2x & y' \\ 2 & y'' \end{vmatrix} + 0 + 0 = 2xy'' - 2y' = 0 \Rightarrow xy'' - y' = 0 \quad (3) \checkmark$$

*سپون اول*

مثال. (تست ۲ صفحه ۷۰۱ جلد دوم) معادله دیفرانسیل دسته دویایی در صفحه که مرکز آن‌ها روی محور  $x$  ها باشد،

(ریاضی ۸۵، عمران و نقشه‌برداری ۹۸)

*دایره*

کدام است؟

مؤلفه  $y$  صفر است  $\Leftarrow \beta = 0$

$$1 + yy'' + y' = 0 \quad (2)$$

$$1 - y^2 y'' + y' = 0 \quad (1)$$

$$1 + yy'' + y'^2 = 0 \quad (4)$$

$$1 - yy'' + y'^2 = 0 \quad (3)$$

معادله دایره به مرکز  $(\alpha, \beta)$  و شعاع  $R$ : هندسه  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

لاول  $y$  و  $y'$   $\Rightarrow$  پارامتر  $\Rightarrow$  معادله خانواده یعنی  $(x-\alpha)^2 + y^2 = R^2$  : مرکز روی محور  $x$  ها

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow 2(x-\alpha) + 2yy' = 0$$

*مرب*

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow 2 + 2y' \cdot y' + 2y \cdot y'' = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل}$$

$$\Rightarrow 1 + y'^2 + yy'' = 0 \quad (4) \checkmark$$

## فصل ۲: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

$$F(x, y, y') = 0 \text{ معادله مرتبه اول}$$

\* جواب عمومی شامل یک پارامتر  $C$  است

$$* \text{ شرط اولی } y_0 = y(x_0)$$

اعمال شرط  $\Leftarrow$  مقدار  $C$  بدست می آید.

### انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

- معادله تفکیک پذیر ✓
- معادله خطی ~~مهم~~ ✓
- معادله برنولی
- معادله ریکاتی
- معادله همگن
- معادله کامل (فاکتور انتگرال - حل معادله با تشکیل دیفرانسیل کامل) ~~مهم~~
- معادله درجه دوم بر حسب  $y'$
- معادله حل شده بر حسب  $x$  یا  $y$  (معادله کلرو)
- مسیر متعامد (کاربرد معادله دیفرانسیل) ✓  $\Leftarrow$  کاربرد معادله

### ۱. معادله تفکیک پذیر (جداشدنی)

تعریف: هر معادله به فرم  $y' = f(x)g(y)$  معادله تفکیک پذیر نامیده می شود.

روش حل: قرار دهید  $y = \frac{dy}{dx}$  و پس عبارات شامل  $y$  را کنار  $dy$  و عبارات شامل  $x$  را کنار  $dx$  بنویسید و پس انتگرال بگیرید.  
جواب شامل  $C$  !!  $\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

مثال. (تست ۵۹ صفحه ۴۹۲ جلد دوم) جواب معادله  $y' = \frac{y-x^2y}{x-xy^2}$  کدام است؟

عومی  $y = \sqrt{\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + c}$  (۲)

(۱)  $y = \sqrt{\frac{1}{4} \ln y + \frac{1}{4}x^2 + c}$

(۴)  $\ln y = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + c$

(۳)  $\ln \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + c$

$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)}$  تفکیک نیز  $\frac{1-y^2}{y} dy = \frac{1-x^2}{x} dx$

$\left(\frac{1}{y} - y\right) dy = \left(\frac{1}{x} - x\right) dx \rightarrow \ln|y| - \frac{1}{2}y^2 = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$  (۳) ✓

حل معادله  
 (۱) تشخیص نوع معادله  
 (۲) یادآوری روش حل  
 (۳) انجام مراحل حل  
 (۴) محاسبه انتگرال ✓

مثال. فرض کنید  $y(x)$  جواب معادله دیفرانسیل  $y' = xe^{-x^2+y}$ ، با شرط  $y(0) = 0$  باشد، در این صورت بجانب

$\int e^u u' dx = e^u$

(عمران ۱۴۰۱)

$y=b$  بجانب افقی  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = b$  : بجانب افقی

افقی  $y(x)$  کدام است؟

(۴) تابع جواب فاقد بجانب افقی است.

(۳)  $y=1$

(۲)  $y=\ln 2$  ✓

(۱)  $y=0$

تفکیک نیز  $\frac{dy}{dx} = y' = x e^{-x^2} \cdot e^y \Rightarrow e^{-y} dy = x e^{-x^2} dx$  (جواب عومی) گام ۱

$\int e^{-y} dy = \int x e^{-x^2} dx \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$   
 (زنی  $u = -x^2$ )  
 $z = -y \Rightarrow dz = -dy$

جواب عومی  
 ضربیات محاسبه انتگرال

گام ۲: اعمال شرط  $y(0) = 0 \xrightarrow{x=0, y=0} -1 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2}$

$\int x e^{-x^2} dx \stackrel{u=-x^2}{=} \int -\frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

جواب خاص  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-\infty} - \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-y} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow -y \rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow y = \ln 2$



نکته. هر معادله به فرم  $y' = f(ax+by+c)$  و  $b \neq 0$  را با تغییر تابع  $u = ax+by+c$  معادله خط

به معادله تفکیک پذیر (بر حسب تابع  $u$  و مستقل  $x$ ) تبدیل می‌کنیم.

مثال. (تست ۱۳ صفحه ۲۸ جلد اول) جواب معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\sin(x-y+1)}$  کدام است؟

(برق ۸۰، مکانیک-آزاد ۸۷، ساجی ۹۳، عمران ۹۴، معدن ۹۷)

معادله خط  $y = 1 - x + \cos^{-1} x$  (۲)

(۱)  $y = 1 + x - \cos^{-1} x$

(۴)  $\cos(y-x+1) = x^2 + 1$

(۳)  $\cos(y-x+1) = 2$

نکته:  $u = x - y + 1 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$

تغییر تابع

تفکیک‌پذیر  $1 - u' = 1 + \frac{1}{\sin u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin u}$

$\Rightarrow -\sin u \, du = dx \xrightarrow{\int} \cos u = x + C$

$\Rightarrow \cos(x-y+1) = x + C \xrightarrow{\cos^{-1}} x - y + 1 = \cos^{-1}(x+C) \Rightarrow y = x + 1 - \cos^{-1}(x+C) \xrightarrow{C=0} (1) \checkmark$

مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $(x-y)^2 y' = 4$ ، کدام است؟

$$y = \ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right) + c \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-y+2}{x-y-2}\right) + c \quad (1)$$

$$y = \ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right) + c \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-y-2}{x-y+2}\right) + c \quad (3)$$

نکته  $\rightarrow u = x - y \xrightarrow{\frac{d}{dx}} u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$

$y' = \frac{4}{(x-y)^2}$  ← معادله

تغییر متغیر  $\rightarrow 1 - u' = \frac{4}{u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \frac{4}{u^2} = \frac{u^2 - 4}{u^2}$

$$\Rightarrow dx = \frac{u^2}{u^2 - 4} du = \frac{(u^2 - 4) + 4}{u^2 - 4} du = \left(1 + \frac{4}{(u-2)(u+2)}\right) du = \left(1 + \frac{1}{u-2} + \frac{1}{u+2}\right) du$$

$$\int \Rightarrow x + C = u + \ln(u-2) - \ln(u+2) = u + \ln \frac{u-2}{u+2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x} + C = \cancel{x} - y + \ln \frac{x-y-2}{x-y+2} \Rightarrow y = \ln \frac{x-y-2}{x-y+2} + C$$

۲. معادله خطی

تعریف: هر معادله به فرم  $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$  *معادله خطی* نامیده می‌شود. ( $a_1(x) \neq 0$ )

روش حل: (۱) معادله را استاندارد کنید (ضریب  $y'$  برابر یک شود یعنی معادله را بر ضریب  $y'$  تقسیم کنید)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

(۲) عامل انتگرال  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$  را محاسبه کنید. (عامل انتگرال معادله خطی استاندارد است)

~~$\mu(x)y' + p(x)\mu(x)y = q(x)\mu(x)$~~   $\rightarrow$   $(\mu(x)y)'$

(۳) جواب عمومی معادله خطی عبارت است از:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int \mu(x)q(x) dx + C \right)$$

مثلاً:  $e^{\int \frac{k}{x} dx} = e^{k \ln x} = e^{\ln x^k} = x^k$

(دکتری مهندسی پزشکی ۹۶)

معادله خطی است!!

$$y = e^x(x+c) \quad (۲)$$

$$y = xe^x(x+c) \quad (۱)$$

$$y = e^{-x}(x+c) \quad (۴)$$

$$y = xe^{-x}(x+c) \quad (۳)$$

استاندارد:  $y' - \frac{x+1}{x}y = x e^x$  ,  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int(1+\frac{1}{x})dx} = e^{-(x+\ln x)} = e^{-x} \cdot e^{-\ln x} = x^{-1} e^{-x}$

فرمول جواب عمومی:  $y = \frac{1}{x^{-1} e^{-x}} \int x^{-1} e^{-x} \cdot x e^x dx = x e^x (x+c) \quad (۱) \checkmark$

$$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln |\cos u|$$

(عمران و نقشه برداری ۹۹)

شرط اول:  $y = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \quad (۲)$

$$y = \frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x} \quad (۱)$$

$$y = \tan x (e^{\sin x} - 1) \quad (۴)$$

$$y = \tan x e^{\sin x} \quad (۳)$$

گام ۱: معادله خطی:  $p(x) = -\operatorname{tg} x$ ,  $q(x) = e^{\sin x}$  جواب عمومی

$$\mu(x) = e^{\int \operatorname{tg} x \, dx} = e^{-\ln(\cos x)} = \cos x$$

فرمول سبب:  $y = \frac{1}{\cos x} \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = \frac{1}{\cos x} (e^{\sin x} + c)$  جواب عمومی

گام ۲: اعمال شرط:  $y(0) = 0 \rightarrow x=0, y=0 \xrightarrow{\text{عمومی}} 0 = \frac{1}{1} (1+c) \Rightarrow c = -1 \quad (۱) \checkmark$

نکته: هر معادله خطی به فرم  $a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$  باشد به شرط آنکه  $a_0'(x) = a_1(x)$  باشد.

نیاز به  $\mu(x)$  ندارد و پس انتگرال می گیریم.  $(a_1(x)y)' = f(x)$

(مدیریت نساجی ۸۲)

مثال. (تست ۵۲ صفحه ۹۴ جلد اول) جواب عمومی معادله  $xy' + y = 4x^3$  برابر است با:

(۲)  $y = cx + 4x^4$

(۱)  $xy = c + 4x^3$

(۴)  $y = cx + 2x^2$

(۳)  $xy = c + x^4$

نکته  $xy' + y = 4x^3 \rightarrow (xy)' = 4x^3 \rightarrow xy = x^4 + c$  (۳) ✓

نکته. هر معادله به فرم  $a_1(x)y' + a_0(x)f(y) = g(x)$  با تغییر تابع  $z = f(y)$  به معادله خطی (بر حسب تابع  $z$  و متغیر  $x$ ) تبدیل می شود.

صبارتی است که مانع خطی شدن است و تنها است و مشتق آن موجود است  $\leftarrow$  خطی می شود.

مثال. (تست ۱ صفحه ۶۳۶ جلد دوم) جواب معادله دیفرانسیل  $xy'y' + \frac{1}{y}y' = x \cos x$  کدام است؟

(دکتری عمران، نقشه برداری، محیط زیست، مهندسی دریا ۹۵)

(۲)  $y^3 = 2 \sin x + \frac{2}{x} \cos x + \frac{c}{x}$

(۱)  $y^3 = 2 \cos x + \frac{2}{x} \sin x + \frac{c}{x}$

(۴)  $y^3 = 2 \sin x - \frac{2}{x} \cos x + \frac{c}{x}$

(۳)  $y^3 = 2 \cos x - \frac{2}{x} \sin x + \frac{c}{x}$

خطی بودن را فراموش نکند مشتق  $y^3$

موجود است  $\leftarrow$  خطی می شود!!

در معادله  $z = y^3$   $\frac{d}{dx} z' = 3y^2 y' \rightarrow \frac{1}{3}xz' + \frac{1}{3}z = x \cos x$  (خطی بر حسب  $z$ )

خوب تر  $\int u dv = uv - \int v du$

$\Rightarrow (\frac{x}{3}z)' = x \cos x \rightarrow \frac{x}{3}z = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \Rightarrow y^3 = 3 \sin x + \frac{3}{x} \cos x + \frac{C}{x}$

مثال. (تست ۳۹ صفحه ۱۳۲ جلد اول) جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x}$  کدام است؟

(ریاضی ۸۰، عمران ۹۶)

مشتق

$$y = e^{-x}(x+c) \quad (۲)$$

$$y = xe^{-x}(x+c) \quad (۱)$$

$$y = e^{x+c}(x-c) \quad (۴)$$

$$y = xe^{-x+c} \quad (۳)$$

$$z = \frac{y}{x} \rightarrow z' = \frac{xy' - y}{x^2} \xrightarrow{\text{معادله}} z' + z = e^{-x} \quad (\text{خطی})$$

$$p(x)=1 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int dx} = e^x \quad z = \frac{1}{e^x} \int e^x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{-x}(x+c) \quad (۱) \checkmark$$

مثال. (تست ۱۴ صفحه ۴۰۱ جلد دوم) جواب عمومی معادله  $y' - x \sin^2 y = xe^{-x^2} \cos^2 y$  کدام گزینه است؟

(برق ۹۰، ریاضی ۹۱، مکانیک ۹۳، کمی ۹۴، ریاضی ۸۴، نساجی ۸۹ و ۹۲، نقشه‌برداری و نساجی ۹۶)

۲sinycasy

$$f \sin y + e^{-x^2} + c \cos y = 0 \quad (۲)$$

$$f \tan y + e^{-x^2} - fce^{x^2} = 0 \quad (۱)$$

$$f \tan x + \frac{x^2}{2} - fce^{x^2} = 0 \quad (۴)$$

$$f \tan y + e^{-2x^2} - fce^{-x^2} = 0 \quad (۳)$$

$$\cos^2 y \Rightarrow y' \sec^2 y - 2x \operatorname{tg} y = x e^{-x^2} \quad z = \operatorname{tg} y \Rightarrow z' = y' \sec^2 y$$

مانع خطی و تنها ← مشتق موجود است ← خطی

$$z' - 2x z = x e^{-x^2} \quad \mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

$$z = \frac{1}{e^{-x^2}} \int e^{-x^2} \cdot x e^{-x^2} dx = e^{x^2} \int x e^{-2x^2} dx = e^{x^2} \left( -\frac{1}{4} e^{-2x^2} + c \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} y = -\frac{1}{4} e^{-x^2} + c e^{x^2} \Rightarrow (۱) \checkmark$$

نکته. هر معادله  $y' = \frac{a(y)}{b(y)x + c(y)}$  با فرض آنکه  $x$  را تابع  $y$  فرض کنید معادله خطی است  $\frac{dy}{dx}$

کافی است قرار دهید  $y' = \frac{1}{x'}$  (که  $x' = \frac{dx}{dy}$ ) و معادله خطی حاصل را حل کنید!!

مثال. (تست ۷ صفحه ۵۶۴ جلد دوم) جواب مسأله مقدار اولیه  $y(1) = 0$  و  $y'e^{\sin y} + xy' \tan y = 1$  کدام است؟

$x=1, y=0$

(مکانیک ۹۴)  
 $y'(e^{\sin y} + x \tan y) = 1$

$\cos x = \ln(y \sin x)$  ✗

$\sin x = \ln(y \cos x)$  ✗

$\cos y = \ln(x \sin y)$  ✗

$\sin y = \ln(x \cos y)$  ✓

نکته  $y = \sin x, x = \tan y$   $y' = \frac{1}{x'}$   
 معادله:  $y' = \frac{1}{x \tan y + e^{\sin y}}$  (جواب عمومی) گام ۱

خطی (تابع  $x$ ، متغیر  $y$ )  
 $\frac{1}{x'} = \frac{1}{x \tan y + e^{\sin y}} \Rightarrow x' = x \tan y + e^{\sin y} \Rightarrow x' - \tan y \cdot x = e^{\sin y}$

جواب عمومی:  $x = \frac{1}{\cos y} (e^{\sin y} + C)$  محاسبات عمران و لفته برداری ۹۹

اعمال شرط  $y(1) = 0 \Rightarrow x=1, y=0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{1} (1+C) \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\cos y} e^{\sin y}$  جواب خاص  $\Rightarrow \sin y = \ln(x \cos y)$  (۳) ✓

۳. معادله برنولی

تعریف: هر معادله به فرم  $a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)y^n$  و  $n \neq 0$  برنولی درجه  $n$  نامیده می‌شود.

روش حل: ابتدا دو طرف معادله را بر  $y^{1-n}$  تقسیم کنید.

$$a_1(x)y' y^{1-n} + a_0(x)y^{1-n} = f(x)$$

پس از تغییر تابع  $z = y^{1-n}$  استفاده کنید تا معادله خطی (بر حسب تابع  $z$  و مستقل  $x$ ) حاصل گردد.

نکته: هر معادله برنولی درجه  $n$  با تغییر تابع  $z = y^{1-n}$  به معادله خطی تبدیل می‌شود.

مثال. (تست ۳۸ صفحه ۴۸ جلد اول) کدامیک از تبدیلات زیر معادله  $y' + P(x)y = y^f Q(x)$  را تبدیل به یک

(مکانیک ۷۰، عمران ۸۹)

معادله خطی خواهد کرد؟

۲  $z = y^f$

۱  $z = y^3$

۳  $z = y^{-3}$

۴ معادله فوق را نمی‌توان خطی کرد.

معادله برنولی با  $n=4 \leftarrow$  با تغییر تابع  $z = y^{-3} = y^{1-n}$  خطی می‌شود. ✓ (۳)



درس و تست معادلات دیفرانسیل  
 (ویژه کنکور ۱۴۰۲)  
 مسعود آقاسی @math\_equation  
 www.m-aghasi.ir

$$y' = \frac{1 - x^2 y^2 \cos^2 x}{y^2 (1 + x^2) \cos^2 x}, \quad y(0) = 1 \implies x=0 \text{ و } y=1$$

$y^2 (1 + x^2) - 2 \tan x = 1$  ✓  
 $y^2 (1 + x^2) + 2 \tan x = -1$  ✗

$x^2 (1 + y^2) + 2 \tan x = 1$  ✗  
 $x^2 (1 + y^2) + 2 \tan x = -1$  ✗

$y' = \frac{1}{(1+x^2) \cos^2 x} y^{-2} - \frac{x^2}{1+x^2} y$     بر روی  $n = -2$

$y^2 y' = \frac{1}{(1+x^2) \cos^2 x} - \frac{x^2}{1+x^2} y^3$     ;     $z = y^3 \implies z' = 3y^2 y'$   
 مانع خطی، تنها، مستقیم موجود!!

(معادله)  $\frac{1}{3} z' + \frac{z^2}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2) \cos^2 x}$     خطی تابع  $z$     ;     $\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$

جواب عمومی     $z = \frac{1}{1+x^2} \int \frac{2}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{1+x^2} (2 \tan x + C) \implies y^3 = \frac{1}{1+x^2} (2 \tan x + C)$

اعمال شرط     $y(0) = 1 \implies x=0 \text{ و } y=1 \implies 1 = \frac{1}{1} (0 + C) \implies C = 1$

جواب خاص     $y^3 = \frac{1}{1+x^2} (1 + 2 \tan x)$     (۲) ✓

نکته. هر معادله به فرم  $y' = \frac{a(y)}{b(y)x + c(y)x^n}$  با فرض آنکه  $x$  تابع و  $y$  مستقل باشد

به معادله برنولی تبدیل می‌گردد. کافی است قرار دهید  $y' = \frac{1}{x'}$

مثال. جواب معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^5 + x^2 y^2}$  کدام است؟  
 $y(1) = 1$

(نقشه برداری ۱۴۰۱)

$$y^2 + x^2 = 3e^{y^2-1} - 1 \quad (2)$$

$$y^2 + x^2 = e^{y^2-1} + 1 \quad (1)$$

$$y^2 + x^2 = 3e^{y^2-1} - 1 \quad (4)$$

$$y^2 + x^2 = e^{y^2-1} + 1 \quad (3)$$

تقسیم بر  $x^2$

نکته  $y$ : مستقل و  $x$ : تابع  $\Rightarrow y' = \frac{1}{x'}$  (معادله)  $\frac{1}{x'} = \frac{1}{xy^2 + x^2 y^5}$

$$\Rightarrow x' = xy^2 + y^5 x^2 \quad (\text{برنولی } n = -2) \xrightarrow{\text{مضرب در } x^2} x^2 x' - y^2 x^3 = y^5$$

$$z = x^3 \xrightarrow{d/dy} z' = 3x^2 x'$$

مانع خطی - تنها - مشتق موجود

خطی ( $z$  تابع،  $y$  مستقل)  $\frac{1}{3} z' - y^2 z = y^5$   $\Rightarrow z' - 3y^2 z = 3y^5$   $\int -3y^2 dy = -y^3$   $\mu(y) = e^{-y^3}$

فرمول:  $z = \frac{1}{e^{-y^3}} \int 3y^5 e^{-y^3} dy = e^{y^3} \int \underbrace{t}_{-y^3} \underbrace{e^t}_{\frac{dt}{-3y^2 dy}} dt = e^{y^3} ((t-1)e^t + c)$   $\int t e^t dt = (t-1)e^t$  ضرب کنید

$$\Rightarrow x^3 = -y^3 - 1 + c e^{y^3} \quad \text{شرط } x=1, y=1 \Rightarrow 1 = -1 + c e^{-1} \Rightarrow c = 3e^{-1} \Rightarrow x^3 = -y^3 - 1 + 3e^{y^3-1} \quad (5) \checkmark$$

# ۴. معادله ریکاتی

درس و تست معادلات دیفرانسیل  
(ویژه کنکور ۱۴۰۲)

@math\_equation مسعود آقاسی  
www.m-aghasi.ir

تعریف: هر معادله  $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \neq 0$  معادله ریکاتی نامیده می شود.  
صافه  $y = \phi(x)$  یک جواب معادله باشد:

- (۱) با تغییر تابع  $y = \phi(x) + u$  به برنولی (درجه  $n=2$ ) تابع  $u$  مستقل  $x$  تبدیل شود.
- (۲)  $y = \phi(x) + \frac{1}{z}$  به معادله خطی بر حسب تابع  $z$  مستقل  $x$  تبدیل می شود.

مثال. (تست ۶ صفحه ۷۵۴ جلد دوم) اگر  $y(x) = \frac{2}{x}$  یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل  $y' + 2x^{-2}y = 2x^{-1}y - y^2$

(مکانیک و برق ۱۴۰۰)  
عنبر برنولی

با شرط  $x \neq 0$  باشد، جواب عمومی معادله، کدام است؟

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{-x + cx^2} \quad (2)$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{2x^2}{x^3 + c} \quad (1)$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{-1 + cx^3}{x} \quad (4)$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{x^3 + c}{3x^2} \quad (3)$$

معادله ریکاتی:  $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$  تغییر تابع  $\frac{d}{dx} y = -2x^{-2} - z^{-2} z'$

معادله:  $-2x^{-2} - z^{-2} z' + 2x^{-2} = 2x^{-2} (2x^{-1} + z^{-1}) - (2x^{-1} + z^{-1})^2$

$\Rightarrow -z^{-2} z' = -2x^{-1} z^{-1} - z^{-2}$   $\xrightarrow{\text{ضرب در } z^2}$   $-z = -\frac{2}{x} z - 1$  خطی  $\Rightarrow z' - \frac{2}{x} z = -1$  ✓

$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = x^{-2}$   $\xrightarrow{\text{فول}}$   $z = \frac{1}{x^{-2}} \int x^{-2} dx = x^2 (-\frac{1}{x} + c) \Rightarrow z = -x + cx^2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} + \frac{1}{-x + cx^2}$  (۲) ✓

**مطالب تدریس شده جلسه اول (از جلد اول معادلات):**

✓ فصل ۱ : صفحه ۱۳ تا ۱۸

✓ فصل ۲ : صفحه ۳۵ تا ۵۰

**تکالیف جلسه اول :**

✓ همه مثالها و تستهای جلد اول معادلات دیفرانسیل از صفحه های بالا

**مطالبی که جلسه دوم (پنجشنبه ۱۹ آبان) تدریس می شود :**

➤ معادله همگن، معادله کامل (فاکتور انتگرال، دیفرانسیل کامل)، معادله

درجه دوم بر حسب  $y'$

حتما نسبت به پیش مطالعه مطالب بالا از کتاب، قبل از حضور در کلاس اقدام بفرمایید.

**پیش نیاز جلسه دوم:**

معادله تفکیک پذیر، معادله خطی

**روشهای رفع اشکال و مشاوره :**

- از طریق ایمیل [masoudaghsi1395@gmail.com](mailto:masoudaghsi1395@gmail.com)
- از طریق بلاگ روم در صفحه اول سایت [www.m-aghasi.ir](http://www.m-aghasi.ir)
- آیدی تلگرام [@math\\_admin77](https://t.me/math_admin77)
- استراحت بین کلاس و پس از اتمام کلاس تا پاسی از شب (برای حاضرین در کلاس آنلاین)

### برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۲

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین (ویژه کنکور ۱۴۰۲) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- <https://b2n.ir/da1402> کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/te1402> کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/mo1402> جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی (بر اساس باکس مطالب مشابه)
- <https://b2n.ir/pa1402> پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/ta1402> ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت
- <https://b2n.ir/eq1402> کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل
- <https://b2n.ir/fe1402> ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/wb1402> وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۲
- <https://b2n.ir/wbb1402> وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۲
- <https://b2n.ir/ja1402> کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (تستهای کنکور ۹۶ تا ۱۴۰۱ رشته های مختلف)
- <https://b2n.ir/fd1402> جلسه اول کلاس درس و تست ریاضی عمومی (رایگان)
- <https://b2n.ir/fm1402> کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط (جلسه ۹ کلاس درس و تست)
- <https://b2n.ir/we1402> وبینار رایگان روش بهینه مطالعه معادلات دیفرانسیل برای کنکور ۱۴۰۲
- <https://b2n.ir/fu1402> جلسه اول کلاس درس و تست معادلات دیفرانسیل (رایگان)

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوه ها خواهد داشت.
- ✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های (درس، نکته، جمع بندی، پکیج) از کد تخفیف **PAYE10** استفاده نمایند تا از ۱۰٪ تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

**توجه :** در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به

صفحه اول سایت <https://negareh.ac.ir/aghasi> یا [www.m-aghasi.ir](http://www.m-aghasi.ir) یا

<https://b2n.ir/cs1402> یا کانال تلگرام [@math\\_equation](https://t.me/math_equation) مراجعه یا از طریق

آیدی تلگرام [@math\\_admin77](https://t.me/math_admin77) یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

[masoudaghasi1395@gmail.com](mailto:masoudaghasi1395@gmail.com)

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال :