کلاس جمع بندی آنلاین ریاضی عمومی

مدرس: مسعود آقاسی

@math_equation

www.m-aghasi.com

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۲

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین(ویژه کنکور ۱۴۰۲) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- کلاس درس و تست ۱۰۰+۱۵ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/da1402
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/te1402
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی(بر اساس باکس مطالب مشابه) https://b2n.ir/mo1402
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/pa1402
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت https://b2n.ir/ta1402
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل https://b2n.ir/eq1402
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/fe1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۲ https://b2n.ir/wb1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۲ https://b2n.ir/wbb1402
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (تستهای کنکور ۹۶ تا ۱۴۰۱ رشته های مختلف) https://b2n.ir/ja1402
- جلسه اول کلاس درس و تست ریاضی عمومی (رایگان) https://b2n.ir/fd1402
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط(جلسه ۹ کلاس درس و تست) https://b2n.ir/fm1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه معادلات دیفرانسیل برای کنکور ۱۴۰۲ https://b2n.ir/we1402
- جلسه اول کلاس درس و تست معادلات دیفرانسیل (رایگان) https://b2n.ir/fu1402
- کارگاه رایگان حل آزمون آزمایشی اول موسسه نگاره https://b2n.ir/az4021
- جلسه اول کلاس نکته و تست ریاضی عمومی (رایگان) https://b2n.ir/ft1402
- کارگاه رایگان حل تست جامع معادلات(تستهای کنکور ۹۹ تا ۱۴۰۱ رشته های مختلف) https://b2n.ir/fr1402
- کارگاه جمع بندی رایگان انتگرال های ریاضی ۲ https://b2n.ir/fr1402

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوره ها خواهد داشت.
- ✓ برای ثبت نام از کد تخفیف PAYE10 استفاده نمایند تا از ٪۱۰ تخفیف اضافه تر بهره مند شوید.

توجه : در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت https://negareh.ac.ir/aghasi یا www.m-aghasi.ir یا https://b2n.ir/cs1402 یا کانال تلگرام @math_equation مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام @math_admin77 یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال : masoudaghasi1395@gmail.com

انواع انتگرال

انتگرال یگانه

- ۱) انتگرال تابع یک متغیره $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ روی بازه $[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx$
  - انتگرال معین و نامعین
    - تغییر متغیر (رادیکالی، مثلثاتی و ...)
    - جزء به جزء
    - تجزیه به کسرهای جزئی
  - انتگرال‌های خاص (بازه نکته دار، .....)
  - تابع گاما و بتا
- ۲) انتگرال تابع (میدان اسکالر) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ روی خم $\alpha(t)$: $\int_\alpha f\,ds$ ← روش تعریف (با جایگذاری از معادله خم در انتگرال)
  - المان طول خم: $ds=|\alpha'(t)|dt$
  - انتگرال روی خم نوع اول
- ۳) انتگرال میدان برداری $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ روی خم α : $\int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha F_1dx+F_2dy+F_3dz=\int_\alpha \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$
  - انتگرال روی خم نوع دوم (کار میدان $\vec{F}$ روی خم)
  - $d\vec{r}=\vec{\alpha}'(t)dt$ بردار سرعت
  - بردار یکه مماس خم $\vec{T}=\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$
  - ۱) روش تعریف (جایگذاری)
  - ۲) پتانسیل
    - میدان القایی
    - دو میدان خاص
  - ۳) قضیه گرین (خم بسته در صفحه xy)
  - ۴) قضیه استوکس (خم بسته در فضا)

انتگرال دوگانه

- انتگرال تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ روی ناحیه D در صفحه: $\iint_D f(x,y)\,dA$
  - تابع دو متغیره (میدان اسکالر)
  - المان مساحت
  - ۱) دکارتی: $dA=dy\,dx=dx\,dy$
  - ۲) قطبی: $dA=r\,dr\,d\theta$ (پیوستن x^2+y^2 در تابع یا مرز ناحیه)
  - ۳) شبه قطبی: $dA=abr\,dr\,d\theta$ (پیوستن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ در تابع یا مرز ناحیه)
  - ۴) تغییر متغیر u و v: $dA=|J|\,du\,dv$ (انتخاب متغیر جدید ابتدا از معادله مرز و سپس تابع)
  - ۵) تعویض نقش x و y
- انتگرال تابع n متغیره روی سطح $g(x,y,z)=0$
  - انتگرال تابع (میدان اسکالر) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ روی سطح: $\iint_S f\,dS$ (انتگرال سطح نوع اول)
    - ۱) روش تعریف (۳ مرحله‌ای - جایگذاری)
    - ۲) تبدیل به شار روی سهمی با قضیه دیورژانس (برای کره کامل)
  - انتگرال میدان برداری $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ روی سطح (شار $\vec{F}$) (انتگرال سطح نوع دوم)
    - $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S (F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,dS$ $=\iint_S F_1\,dy\,dz+F_2\,dx\,dz+F_3\,dx\,dy$
    - قائم یکه سطح
    - ۱) روش تعریف (۳ مرحله‌ای - جایگذاری)
    - ۲) قضیه دیورژانس (روی سطح بسته)
    - ۳) نتیجه استوکس (شار curl F روی سطح غیربسته)

انتگرال سه‌گانه

- انتگرال تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ روی ناحیه W در فضا: $\iiint_W f\,dV$
  - المان حجم
  - تابع سه متغیره (میدان اسکالر)
  - ۱) دکارتی: $dV=dx\,dy\,dz=dy\,dz\,dx$ .....
  - ۲) استوانه‌ای: $dV=r\,dz\,dr\,d\theta$ (پیوستن x^2+y^2 در تابع یا مرز ناحیه)
  - ۳) کروی: $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (پیوستن $x^2+y^2+z^2$ در تابع یا مرز ناحیه)
  - ۴) شبه کروی: $dV=abc\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (پیوستن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ در تابع یا مرز ناحیه)
  - ۵) تغییر متغیر u و v و w: $dV=|J|\,du\,dv\,dw$ (انتخاب متغیر جدید ابتدا از معادله مرز و سپس تابع)
  - ۶) تعویض نام (تعویض نقش) دو متغیر

انتگرال یگانه در ریاضی ۲ (انتگرال روی خم)

فرض کنید $\vec{\alpha}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ یک خم پارامتری باشد:

۱) انتگرال روی خم نوع اول (انتگرال میدان اسکالر روی خم - انتگرال خط)

انتگرال تابع ۳ متغیره (میدان اسکالر) $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ روی خم α : $\int_\alpha f\,ds$

← المان طول قوس $ds=|\alpha'(t)|dt$ و $\alpha'(t)$ بردار سرعت خم است.

روش محاسبه: با جایگذاری از معادله خم در انتگرال به انتگرال یک متغیره (ریاضی ۱) برحسب پارامتر t می‌رسیم.

۲) انتگرال روی خم نوع دوم (انتگرال میدان برداری روی خم - کار، چرخش، گردش میدان روی خم)

میدان برداری (نیرو) $\vec{F}(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$

انتگرال (کار) میدان $\vec{F}$ روی خم α $=\int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha F_1dx+F_2dy+F_3dz=\int_\alpha \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$

جابجایی دیفرانسیلی $d\vec{r}=\vec{\alpha}'(t)dt=(dx,dy,dz)$

بردار یکه مماسی $\vec{T}=\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$

روش محاسبه انتگرال کار:
- ۱) روش تعریف (جایگذاری)
- ۲) پتانسیل — میدان ابقایی، (روش خاص)
- ۳) قضیه گرین (خم بسته در صفحه xy)
- ۴) قضیه استوکس (خم بسته در فضا)

۱) روش اول (روش تعریف) از معادله خم (به صورت یک متغیره) در انتگرال جایگذاری کنید تا به انتگرال ریاضی ۱ تبدیل گردد. (معمولاً این روش طولانی است!!)
توجه کنید که $d\vec{r}=\alpha'(t)dt$ نیز در محاسبه استفاده می‌شود.

۲) روش دوم (میدان ابقایی - تابع پتانسیل)

اگر میدان برداری $\vec{F}$ کنسرواتیو (ابقایی) باشد:
- خم بسته است α → انتگرال (کار) $\vec{F}$ $=\oint_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$
- خم غیربسته است α → انتگرال (کار) $\vec{F}$ $=\int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(\text{نقطه انتهای خم})-\phi(\text{نقطه ابتدای خم})$

ϕ : تابع پتانسیل
← کار مستقل از مسیر است.

تعریف میدان ابقایی: میدان برداری $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ را ابقایی می‌نامیم، هرگاه میدان اسکالر $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ موجود باشد که $\vec{\nabla}\phi=\vec{F}$ (روی دامنه $\vec{F}$)
↑ تابع پتانسیل

روش بررسی ابقایی بودن میدان $\vec{F}$: تشکیل $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\text{curl}\,F$
- $\text{curl}\,F\neq\vec{0}$ ($\frac{\partial F_2}{\partial x}\neq\frac{\partial F_1}{\partial y}$ در میدان ۲ بعدی) ⇒ $\vec{F}$ ابقایی نمی‌باشد
- $\text{curl}\,F=\vec{0}$ ($\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$ در میدان ۲ بعدی) , دامنه $F=\mathbb{R}^n$ ⇒ $\vec{F}$ ابقایی است
- $\text{curl}\,F=\vec{0}$ ($\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$ در میدان ۲ بعدی) , دامنه $F\neq\mathbb{R}^n$ ⇒ وضعیت $\vec{F}$ نامشخص
  ضابطه F اشکال دارد (مثلاً تقسیم بر صفر)

اگر $\text{curl}\,F=\vec{0}$ گوییم میدان $\vec{F}$ غیرچرخشی است

میدان برداری ⇒ تعریف $\text{curl}\,F$:

$$\text{curl}\,F=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_1&F_2&F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

روش محاسبه تابع پتانسیل ← تست

اگر میدان $\vec{F}(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)$ ابقایی باشد ⇒ $\phi(x,y,z)=\int F_1dx+\int F_2^{*}dy+\int F_3^{*}dz$ (تابع پتانسیل)

F_2^{*} : جملاتی از F_2 که x ندارند
F_3^{*} : جملاتی از F_3 که x, y ندارند

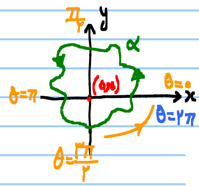
میدان‌های برداری خاص و مهم:

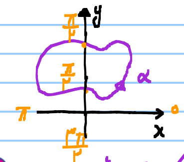
- میدان $\vec{G}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ **ابقایی** با تابع پتانسیل $\phi(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ است و لذا محاسبه انتگرال کار از قواعد بالا تبعیت می‌کند.
- میدان $\vec{H}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ چرخشی و **غیرابقایی** است اما اگر θ را زاویه در مختصات قطبی ($\tan\theta=\frac{y}{x}$) بگیریم آنگاه $\vec{\nabla}\theta=\vec{H}$ پس:

$$(\vec{H}=\vec{\nabla}\theta)\ \text{کار میدان}=\int_\alpha \vec{H}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\theta_2-\theta_1$$

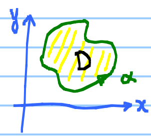
θ_2: زاویه قطبی نقطه انتهای خم — θ_1: زاویه قطبی نقطه ابتدای خم

که به ازای هر بار چرخش حول مبدأ در جهت مثلثاتی 2π به θ_2 اضافه می‌شود.





۳) روش سوم (قضیه گرین)



($\vec{F}$ داخل D مشکل ندارد) مشتقات جزئی F داخل D پیوسته

$$\text{کار میدان } \vec{F} \text{ روی خم } \alpha=\oint_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_\alpha F_1dx+F_2dy=\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA$$

α: خمی بسته در صفحه xy (z ندارد) که یک بار در جهت مثلثاتی طی می‌شود

D: داخل خم بسته α

$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$: مؤلفه سوم کرل F یعنی $\text{curl}F\cdot\vec{k}$

استفاده از قضیه گرین برای خم غیربسته!!

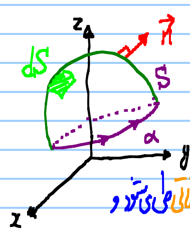
اگر خم α غیربسته باشد و ضابطه $\vec{F}$ شامل تابع‌هایی باشد که محاسبه کار را با قضیه گرین پیشنهاد دهد، برای محاسبه $\int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مراحل زیر را انجام دهید:

مرحله ۱: خم مناسب α' (معمولاً پاره‌خط واصل بین نقاط ابتدا و انتهای خم α) را طوری در نظر بگیریم که $\alpha\cup\alpha'$ بسته گردد.

مرحله ۲: روی خم بسته $\alpha\cup\alpha'$ با قضیه گرین کار را محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۳: با روش تعریف (جایگذاری) کار را روی خم α' محاسبه و از جواب مرحله (۲) کم می‌کنیم.

۴) روش چهارم (قضیه استوکس)



(ضابطه $\vec{F}$ روی سطح S مشکل ندارد) میدانی با مشتقات پیوسته روی S

$$\text{کار میدان } \vec{F}=\oint_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \text{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

المان سطح برای S

$\vec{n}$: قائم بر سطح S

α: خمی بسته که یک بار در جهت مثلثاتی طی می‌شود و مرز سطح S می‌باشد.

S: سطحی که α مرز آن است

توصیه: S را داخل خم α در نظر بگیرید

برای محاسبه این انتگرال که شار میدان curlF است از روش تعریف (۳ مرحله‌ای) استفاده کنید.

جهت خم α و قائم بر سطح با توجه به قاعده دست راست تعیین می‌شود.

جهت خم α: جهت چهار انگشت دست راست — قائم بر سطح: جهت انگشت شست

انتگرال دوگانه:

حالت اول: انتگرال دوگانه در صفحه مختصات: $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابع دو متغیره و $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ناحیه

$dA=$ (مساحت) المان سطح

$\iint_D f(x,y)\,dA =$ انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D $\xrightarrow{\text{اگر } f=1}$ $\iint_D dA=$ مساحت D

روش محاسبه انتگرال ۲گانه $\iint_D f\,dA$:

۱) دکارتی: $dA=dy\,dx=dx\,dy$

۲) قطبی: $dA=r\,dr\,d\theta$ (دیده شدن x^2+y^2 در تابع یا مرز ناحیه)

۳) شبه قطبی: $dA=ab\,r\,dr\,d\theta$ (دیده شدن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ در تابع یا مرز ناحیه)

۴) تغییر متغیر u,v: $dA=|J|\,du\,dv$ (انتخاب متغیر جدید ابتدا از معادله مرز و سپس تابع)

۵) تعویض نقش x و y

۱) محاسبه انتگرال دوگانه با روش دکارتی:

الف) شکل ناحیه را در صفحه xy رسم کنید.

ب) انتخاب ترتیب مناسب انتگرال گیری (یعنی $dA=dy\,dx$ یا $dA=dx\,dy$)

اولویت انتخاب ابتدا با تابع f و سپس شکل ناحیه D

با متغیری شروع کنید که انتگرال ساده تری دارد

با متغیری شروع کنید که ناحیه را با یک انتگرال توصیف کند یا معادله مرز ساده تری دارد

ج) برای نوشتن حدود انتگرال، خطی به موازات محور اولین متغیر dA در شکل ناحیه رسم کنید تا به ناحیه داخل و خارج گردد.

د) محاسبه از داخلی ترین انتگرال با روشهای ریاضی ۱

$$\int_{\circ}^{\circ}\int_{\circ}^{\circ} f(x,y)\,dA$$

ماکزیمم مقدار دومین متغیر در ناحیه

مینیمم مقدار دومین متغیر در ناحیه

معادله خروج خط از ناحیه

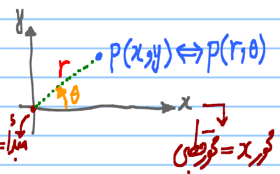
معادله ورود خط به ناحیه

۲) محاسبه انتگرال دوگانه با مختصات قطبی:

معمولاً با دیده شدن x^2+y^2 در معادله مرزها یا تابع تحت انتگرال از مختصات قطبی r,θ استفاده می کنیم.

معمولاً مرز ناحیه دایره، قسمتهایی از دایره، اشکال معروف قطبی

مختصات قطبی: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2\ ;\ dA=r\,dr\,d\theta=r\,d\theta\,dr$



r: فاصله تا مبدأ مختصات

θ: زاویه شعاع حامل با جهت مثبت محور x ها

محدودیت ذاتی $\begin{cases}r\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi] \text{ یا } \theta\in[-\pi,\pi]\end{cases}$

حدود یابی r و θ: معادله مرزها را در مختصات قطبی بنویسید (در صورت نیاز شکل ناحیه را رسم کنید و برای یافتن حدود r نیم خط شعاعی از مبدأ رو به بیرون در ناحیه رسم کنید)

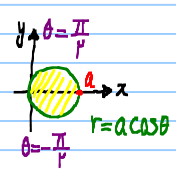
شعاع حامل

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}}\int_{r_{\text{ورود}}}^{r_{\text{خروج}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

نواحی مهم در مختصات قطبی

الف) داخل دایره به مرکز مبدأ و شعاع a یعنی داخل دایره $x^2+y^2=a^2$ در قطبی $0\leq r\leq a$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ است.

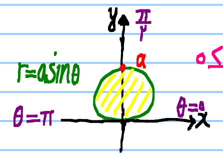
ب) داخل دایره افقی $x^2+y^2=ax$ که $a>0$



$0\leq r\leq a\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

قطر دایره $=a$

ج) داخل دایره قائم $x^2+y^2=ay$ که $a>0$



$0\leq r\leq a\sin\theta$, $0\leq\theta\leq\pi$

قطر دایره $=a$

۳) محاسبه انتگرال دوگانه با تغییر متغیر شبه قطبی

معمولاً با دیدن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ در معادله مرزهای ناحیه و تابع تحت انتگرال از مختصات شبه قطبی استفاده می‌شود خصوصاً وقتی مرز ناحیه بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ باشد. $(a>0, b>0)$

تعریف مختصات شبه قطبی $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases} \Rightarrow dA=ab\,r\,dr\,d\theta \;,\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$

با تغییر متغیر شبه قطبی ناحیه داخل بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ به ناحیه داخل دایره $r=1$ یعنی ناحیه $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ تبدیل می‌شود.

۴) محاسبه انتگرال دوگانه با تغییر متغیر u و v

اگر روشهای قبلی قابل استفاده نباشند، دو متغیر جدید u و v را با توجه به معادله مرزها و ضابطه f در نظر می‌گیریم.

الف) ۱) معادله مرزها را متغیر جدید بگیرید (u و v را قسمت مشترک معادله مرزها بگیرید)
۲) از ضابطه f برای تعیین u و v استفاده کنید.

ب) همه معادله مرزها را در مختصات جدید بنویسید (در صورت نیاز شکل آن را در صفحه uv بکشید و مانند دکارتی ناحیه را توصیف کنید)

ج) ژاکوبین تغییر متغیر را محاسبه کنید.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$ معمولاً این فرمول لازم است

د) $dA=|J|\,du\,dv=|J|\,dv\,du$ را در انتگرال جایگذاری و کل انتگرال را بر حسب u و v نوشته و مانند دکارتی محاسبه می‌کنیم.
ترتیب آنها با توجه به تابع و ناحیه تعیین می‌شود

۵) محاسبه انتگرال دوگانه با تعویض نقش (تعویض نام) متغیرها

در انتگرال دوگانه اگر در تابع تحت انتگرال و معادله مرزهای ناحیه همزمان از تعویض نام متغیرها استفاده کنیم، حاصل انتگرال تغییر نمی‌کند.

مثلاً اگر با تعویض نام $x\to y$ و $y\to x$ ناحیه D به ناحیه D' تبدیل شود آنگاه:

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D'} f(y,x)\,dA$$

چند نکته برای تسریع در محاسبه انتگرال

۱) اگر تابع پیوسته f نسبت به متغیری فرد و معادله همه مرزهای ناحیه کراندار D نسبت به همان متغیر زوج باشد، انتگرال (۲گانه، ۳گانه) تابع f روی آن ناحیه صفر می‌شود.

۲) اگر تابع f و معادله همه مرزهای ناحیه D نسبت به متغیری زوج باشند، آن متغیر را مثبت در نظر گرفته و جواب در ۲ ضرب می‌شود.

۳) اگر تابع تحت انتگرال (در انتگرال ۲گانه یا ۳گانه) جداشدنی ضربی باشد و هیچ یک از حدود انتگرال متغیر نباشد، انتگرال را به صورت ضرب انتگرالهای یگانه بنویسید. مثلاً:

$$\int_a^b\int_c^d \underbrace{f(u)g(v)}_{\text{تابع جداشدنی ضربی است}}\,du\,dv=\left(\int_a^b g(v)\,dv\right)\left(\int_c^d f(u)\,du\right)$$

حالت دوم. انتگرال دوگانه روی سطح در فضا (انتگرال سطح)

فرض کنید سطح S در فضا دارای معادله $g(x,y,z)=0$ باشد. المان (دیفرانسیل) سطح یعنی مساحت دیفرانسیلی آن $dS=d\sigma$ است:

انواع انتگرال سطح

- انتگرال تابع (میدان اسکالر) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ روی سطح: $\iint_S f\,dS$ (انتگرال سطح نوع اول)
  1. روش تعریف (۳ مرحله‌ای - جایگذاری)
  2. تبدیل به شار و محاسبه با قضیه دیورژانس (برای کره کامل)
- انتگرال میدان برداری $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ روی سطح (شار $\vec{F}$) (انتگرال سطح نوع دوم)

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S (F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,dS$$

$$=\iint_S F_1\,dy\,dz+F_2\,dx\,dz+F_3\,dx\,dy$$

  1. روش تعریف (۳ مرحله‌ای - جایگذاری)
  2. قضیه دیورژانس (روی سطح بسته)
  3. نتیجه استوکس (شار میدان $curl F$ روی سطح غیر بسته)

الف) انتگرال میدان اسکالر روی سطح (انتگرال سطح نوع اول)

میدان اسکالر $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$

$\Rightarrow$ انتگرال تابع f روی سطح S $=\iint_S f\,dS \xrightarrow{f=1 \text{ اگر}}$ مساحت سطح S $=\iint_S dS$

*** روش عمومی محاسبه انتگرال $\iint_S f\,dS$** (روش تعریف - روش ۳ مرحله ای - روش جایگذاری)

مرحله اول. سطح S را بر یکی از سه صفحه مختصاتی (معمولاً صفحه xy) تصویر کرده و آن را D می‌نامیم.

مرحله دوم. المان سطح dS را محاسبه کنید.

مرحله سوم. پس از جایگذاری dS در انتگرال (و در صورت نیاز با جایگذاری از معادله سطح در انتگرال با هدف نابود کردن متغیری که روی صفحه تصویر وجود ندارد) بر ناحیه D انتگرال دوگانه (دکارتی - قطبی - شبه قطبی - ......) بگیرید.

فرمولهای مهم برای محاسبه dS

۱) اگر معادله سطح $g(x,y,z)=0$ و قائم یکه صفحه تصویر $\vec{p}$ باشد

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\vec{p}|}\,\underbrace{dA}_{\text{المان سطح روی صفحه تصویر}}$$

۲) اگر سطح S مخروط $z=\sqrt{a(x^2+y^2)}$ باشد و تصویر را روی صفحه xy (یعنی صفحه $z=0$) انجام دهید: $dS=\sqrt{a+1}\,dA$

۳) اگر S نیم کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $z\geq 0$ یا $z\leq 0$ باشد و آن را روی صفحه xy (یعنی صفحه $z=0$) تصویر کنیم:

$$dS=\frac{a}{|z|}\,dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dA$$

۴) هرگاه سطح S موازی یا منطبق بر یکی از صفحه‌های مختصاتی (یعنی دارای معادله $x=\alpha$ یا $y=\beta$ یا $z=\gamma$) باشد: $dS=dA$

*** روش خاص محاسبه $\iint_S f\,dS$ برای کره کامل**

برای کره کامل $x^2+y^2+z^2=a^2$ که $a>0$ قائم یکه برونسو $\vec{n}=\frac{1}{a}\underbrace{\vec{r}}_{\text{بردار مکان}}=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$ است، به‌جای استفاده از روش ۳ مرحله‌ای میدان برداری مناسب $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ را طوری می‌یابیم که $\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{1}{a}(xF_1+yF_2+zF_3)=\underbrace{f}_{\text{میدان اسکالر در صورت سؤال}}$ و لذا به انتگرال شار $\vec{F}$ می‌رسیم که روی سطح بسته کره با قضیه دیورژانس (انتگرال سه‌گانه) قابل محاسبه است.

ب) انتگرال روی سطح نوع دوم (انتگرال میدان برداری روی سطح - انتگرال شار)

$F(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ میدان برداری

S : سطح به معادله $g(x,y,z)=0$

$\vec{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ قائم یکه بر سطح که با محورهای مختصاتی به ترتیب زاویه α و β و γ می‌سازد.

$\Rightarrow$ انتگرال (شار) میدان $\vec{F}$ روی سطح S $=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S (F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,dS$

$=\iint_S F_1\,dy\,dz+F_2\,dx\,dz+F_3\,dx\,dy$

توجه: $d\vec{S}=\vec{n}\,dS$

روشهای محاسبه انتگرال شار

روش اول: (روش تعریف - روش ۳ مرحله‌ای - روش جایگذاری)

مرحله اول: سطح S را بر یکی از سه صفحه مختصاتی (معمولاً صفحه xy) تصویر کرده و آن را D می‌نامیم.

مرحله دوم: الان برای سطح را از رابطه $\vec{n}\,dS=d\vec{S}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g\cdot\vec{p}|}\,dA$ محاسبه کنید ($\vec{p}$ قائم یکه صفحه تصویر، علامت + یا - با توجه به جهت شار تعیین می‌شود)

مرحله سوم: پس از جایگذاری $\vec{n}\,dS$ در انتگرال (و در صورت نیاز با جایگذاری از معادله سطح در انتگرال با هدف نابود کردن متغیری که روی صفحه تصویر موجود نیست) روی ناحیه D انتگرال دوگانه (دکارتی - قطبی - شبه قطبی - ......) بگیرید.

روش دوم (قضیه دیورژانس)

$\vec{F}$ مشتقات پیوسته داخل W دارد (ضابطه $\vec{F}$ داخل W مشکل ندارد)

قائم یکه برونسو S

$\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ انتگرال (شار) میدان $=\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_W div F\,dV$

S سطح بسته

W: داخل سطح S

توجه: سطح بسته باید یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ را محدود کند. در واقع مرز (رویه یا سطح محدودکننده) یک ناحیه در فضا سطح بسته است.

یادآوری: $div F=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$ میدان اسکالر

قضیه دیورژانس برای سطح غیر بسته!!

اگر سطح S بسته نباشد و ضابطه میدان $\vec{F}$ شامل تابع هایی باشد که قضیه دیورژانس را پیشنهاد می‌دهد، برای محاسبه شار $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ مراحل زیر را طی کنید:

۱) سطح مناسب S' (معمولاً داخل خم مرزی سطح S) را طوری می‌یابیم که $S\cup S'$ بسته گردد.

۲) شار روی سطح بسته $S\cup S'$ را با قضیه دیورژانس محاسبه کنید.

۳) شار روی S' را با روش تعریف (روش ۳ مرحله‌ای) محاسبه و از جواب (۲) کم کنید.

نکته: اگر $\vec{r}=(x,y,z)$ بردار مکان و $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ برای میدان $\vec{F}(x,y,z)=\frac{\vec{r}}{r^3}=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

الف) $div(F)=0$

ب) شار برونسوی میدان $\vec{F}$ یعنی $\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ روی سطح S (بسته) که مبدأ روی سطح قرار ندارد:

- چنانچه مبدأ داخل سطح S باشد برابر 4π است.
- چنانچه مبدأ داخل سطح S نباشد برابر صفر است.

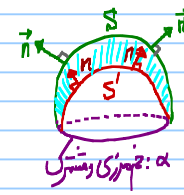
روش سوم (نتیجه قضیه استوکس برای محاسبه شار $\text{curl} F$ روی سطوح غیربسته)

مشتقات $\vec F$ پیوسته

$$\iint_S \text{curl}F\cdot n\, dS = \iint_{S'} \text{curl}F\cdot n\, dS$$ = با روش تعریف (۳ مرحله‌ای) باید محاسبه کنید

S': سطح غیربسته که مرز مشترک با S دارد.

توصیه: S' را داخل مرز سطح S بگیرید.



توجه: قائم $\vec n$ برای ورود یا خروج به ناحیه محدود به $S\cup S'$ برعکس هم هستند.

نکته: اگر میدان $\vec F$ دارای مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشد، شار میدان $\text{curl}F$ روی سطح بسته صفر است یعنی $\oiint_S \text{curl}F\cdot n\, dS = 0$

نکاتی در مورد میدان ها

اگر $\vec F=(F_1,F_2,F_3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ میدان برداری و $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ میدان اسکالر با مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشند:

۱) $\text{curl}(\nabla\phi)=\vec 0 \Rightarrow$ میدان $\nabla\phi$ غیرچرخشی است.

۲) $\text{div}(\text{curl}F)=0$

۳) تعریف لاپلاسین: $\Delta\phi=\nabla^2\phi=\nabla\cdot(\nabla\phi)=\text{div}(\nabla\phi)=\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}$ «میدان اسکالر»

اگر $\nabla^2\phi=0$ می‌گوییم تابع ϕ همساز (هارمونیک) است.

۴) $\text{div}(\phi\vec F)=\vec\nabla\cdot(\phi\vec F)=\underbrace{\vec\nabla\phi}_{\text{گرادیان } \phi}\cdot\vec F+\phi\underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec F)}_{\text{div}\,\vec F}$

مانند مشتق حاصلضرب

۵) $\text{curl}(\phi\vec F)=\vec\nabla\times(\phi\vec F)=\underbrace{\vec\nabla\phi}_{\text{گرادیان } \phi}\times\vec F+\phi\underbrace{(\vec\nabla\times\vec F)}_{\text{curl}\,\vec F}$

مانند مشتق حاصلضرب

۶) اگر $\vec r=(x,y,z)=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ بردار مکان و $r=|\vec r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و n عددی حقیقی باشد:

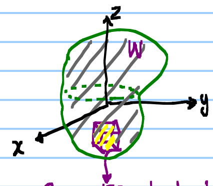
الف) گرادیان $f(r)$: $\nabla f(r)=\underbrace{f'(r)}_{\text{مشتق } f(r) \text{ نسبت به } r}\dfrac{\vec r}{r}$

ب) $\text{div}(r^n\vec r)=(n+3)r^n$

ج) $\text{curl}(r^n\vec r)=\vec 0 \Rightarrow$ به ازای هر n میدان $r^n\vec r$ غیرچرخشی است.

* انتگرال سه‌گانه:

$f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابع سه‌متغیره (میدان اسکالر) و $W \subseteq \mathbb{R}^3$ یک ناحیه در فضا:



انتگرال سه‌گانه تابع f روی ناحیه W = $\iiint_W f\,dV$ $\xrightarrow{f=1}$ حجم ناحیه W = $\iiint_W dV$

المان حجم $dV = dz\,dy\,dx = dx\,dz\,dy = \ldots\ldots$

روشهای محاسبه انتگرال سه‌گانه $\iiint_W f\,dV$:

۱) دکارتی: $dV = dx\,dy\,dz = dy\,dz\,dx = \ldots$

۲) استوانه‌ای: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$ (دیده شدن x^2+y^2 در تابع یا مرز ناحیه)

۳) کروی: $dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (دیده شدن $x^2+y^2+z^2$ در تابع یا مرز ناحیه)

۴) شبه کروی: $dV = abc\,\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (دیده شدن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ در تابع یا مرز ناحیه)

۵) تغییر متغیر u و v و w: $dV = |J|\,du\,dv\,dw$ (انتخاب u، v، w از معادله مرز و تابع)

۶) تعویض نام (تعویض نقش) دو متغیر

۱) محاسبه انتگرال سه‌گانه با روش دکارتی

ابتدا ترتیب انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنیم. با توجه به ضابطه f از بین دیفرانسیل‌های dx و dy و dz انتگرال را با المانی که محاسبه را ساده‌تر می‌کند شروع می‌کنیم. اگر برای تابع تفاوتی در نحوه انتخاب، وجود نداشته باشد، با متغیر دومقداری یعنی متغیری که دقیقاً در ۲ معادله مرز دیده می‌شود، شروع می‌کنیم. (از بین دومقدار، max را در کران بالا و min را در کران پایین داخلی‌ترین انتگرال بنویسید)

ضمناً مشابه دوگانه در صورت رسم شکل ناحیه W در فضا، معادله ورود و خروج خطی که به موازات محور اولین متغیر در dV در ناحیه رسم می‌شود، کران‌های داخلی‌ترین انتگرال خواهند بود.

برای حدود دو متغیر دیگر، ناحیه W را بر صفحه آن دو متغیر تصویر کرده و آن را در دوگانه توصیف کنید.

۲) محاسبه انتگرال سه‌گانه با تغییر متغیر (مختصات) استوانه‌ای

معمولاً با دیده شدن x^2+y^2 در معادله مرزهای ناحیه یا تابع تحت انتگرال از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

در عمل تعمیم مختصات قطبی به فضای ۳ بعدی
و تصویر ناحیه بر صفحه xy در قطبی نوشته می‌شود.

تعریف مختصات استوانه‌ای (r,θ,z):
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
قطبی (x و y)

$\Rightarrow dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

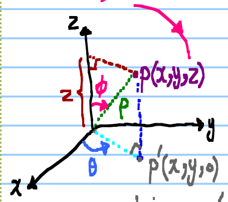
ژاکوبین (r)

z ماهیت دکارتی (تغییر ۲ مقداری) دارد.

برای یافتن حدود r و θ باید ناحیه را بر صفحه xy تصویر کنید
سپس تصویر را در قطبی بنویسید.

۳) محاسبه انتگرال با تغییر متغیر (مختصات کروی)

معمولاً با دیدن شدن $x^2+y^2+z^2$ در تابع یا مرز ناحیه (ناحیه با مرز کره، مخروط) از مختصات کروی (ρ,ϕ,θ) استفاده می‌کنیم.

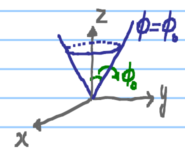


تعریف مختصات کروی
$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow dV=\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

محدودیت‌های ذاتی
$$\begin{cases} \rho\geq 0 \\ 0\leq\phi\leq\pi \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ یا } -\pi\leq\theta\leq\pi \end{cases}$$

θ: همان زاویه قطبی

$$\boxed{\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\quad \rho\sin\phi=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \tan\phi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}}$$



اشکال معروف در مختصات کروی:

۱) $\rho=a>0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=a^2$ کره به مرکز مبدأ و شعاع a

۲) $\phi=\phi_0$ که $\phi_0\neq 0,\frac{\pi}{2},\pi \Leftarrow$ مخروط $z=(\cot\phi_0)\sqrt{x^2+y^2}$ (ϕ_0: زاویه مخروط با جهت مثبت محور zها)

۳) $\phi=0$: محور zهای مثبت ؛ $\phi=\pi$ محور zهای منفی و $\phi=\frac{\pi}{2}$: صفحه xy

۴) محاسبه انتگرال سه‌گانه با تغییر متغیر شبه کروی

معمولاً با دیدن عبارت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ در تابع تحت انتگرال یا معادله مرزهای ناحیه از مختصات شبه کروی استفاده می‌شود. خصوصاً وقتی مرز ناحیه بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد. $(a>0, b>0, c>0)$

تعریف مختصات شبه کروی
$$\begin{cases} x=a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=c\rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow dV=abc\,\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta\ ;\quad \rho^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ ,\quad \rho^2\sin^2\phi=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

با تغییر متغیر شبه کروی ناحیه داخل بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ به ناحیه داخل کره $\rho=1$ یعنی $0\leq\theta\leq 2\pi\ ;\ 0\leq\phi\leq\pi\ ,\ 0\leq\rho\leq 1$ تبدیل می‌شود.

۵) محاسبه انتگرال سه‌گانه با تغییر متغیر u و v و w

اگر روشهای قبلی قابل استفاده نباشد، سه متغیر جدید u و v و w با توجه به معادله مرزها و ضابطه f در نظر می‌گیریم.

الف) ۱) معادله مرزها را متغیر جدید بگیرید (u, v, w را قسمت مشترک معادله مرزها بگیرید)

۲) از ضابطه f برای تعیین u و v و w استفاده کنید.

ب) همه معادله مرزها را در مختصات جدید بنویسید (در صورت نیاز شکل ناحیه را در فضای جدید u و v و w رسم کنید و مانند دکارتی ناحیه را توصیف کنید)

ج) ژاکوبین تغییر متغیر را محاسبه کنید.

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$ ← معمولاً این فرمول لازم است

د) $dA=|J|\,du\,dv\,dw$ را در انتگرال جایگذاری و کل انتگرال را برحسب u و v و w نوشته و مانند دکارتی محاسبه کنید.

ترتیب المان با توجه به تابع و ناحیه تعیین می‌شود

۶) محاسبه انتگرال سه‌گانه با تعویض نقش (تعویض نام) دو متغیر

در انتگرال سه‌گانه اگر در تابع تحت انتگرال و معادله مرزهای ناحیه همزمان از تعویض نام متغیرها استفاده کنیم، حاصل انتگرال تغییر نمی‌کند.

مثلاً اگر با تعویض نام $z\to x$ و $x\to z$ ناحیه W به ناحیه W' تبدیل شود آنگاه:

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV=\iiint_{W'} f(z,y,x)\,dV$$

کاربردهای فیزیکی و هندسی انتگرال

اگر جسم R (ناحیه در $\mathbb{R}^2$ ، ناحیه در $\mathbb{R}^3$ ، خم ، سطح) دارای چگالی $\delta=\delta(x,y,z)$ باشد:

dA ، dV ، ds ، dS

دیفرانسیل جسم R

۱) جرم R : $M=\int_R \delta\, dR$

۲) گشتاور نسبت به صفحه xy : $M_{xy}=\int_R z\cdot\delta\, dR$

فاصله تا صفحه xy

۳) $\bar{z}=\dfrac{\int_R z\,\delta\, dR}{\int_R \delta\, dR}$ مولفه سوم مرکز جرم (گرانیگاه)

همان اینرسی - گشتاور دوم

۴) گشتاور دوم نسبت به محور z : $I_z=\int_R (x^2+y^2)\cdot\delta\, dR$

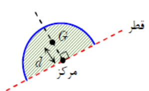
مربع فاصله تا محور zها

اگر $\delta=1$ فرمول (۳) مرکز هندسی R را محاسبه می‌کند.

۵) میانگین (مقدار متوسط) تابع f روی R $=\dfrac{\int_R f\, dR}{\int_R dR}$

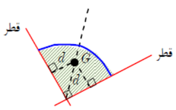
در همه فرمول‌ها dR المان روی جسم است که برابر dA یا dV یا ds یا dS خواهد بود.

چند نکته:



۱) فاصله مرکز هندسی ناحیه داخل نیم دایره یا ناحیه داخل ربع دایره به شعاع a از قطر ناحیه برابر $d=\frac{4a}{3\pi}$ می‌باشد.

ناحیه هاشور خورده در شکل



۲) فاصله مرکز هندسی نیم دایره یا ربع دایره به شعاع a (یعنی خم) از قطر خم برابر $d=\frac{2a}{\pi}$ می‌باشد.

خم آبی رنگ در شکل

۳) مرکز هندسی مثلث، میانگین رئوس آن است.

۴) فاصله مرکز هندسی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $z\geq 0$ از صفحه xy (صفحه $z=0$) برابر $\bar{z}=\frac{1}{2}a$ است.

۵) اگر تابع $f(x,y)$ درجه اول باشد یعنی $f(x,y)=ax+by+c$ و از هندسه مساحت و مرکز هندسی ناحیه D یعنی $G(\bar{x},\bar{y})$ مشخص باشد برای محاسبه انتگرال f با توجه به فرمول مرکز هندسی داریم:

$$\iint_D x\,dA=\bar{x}\cdot \text{مساحت } D \;;\; \iint_D y\,dA=\bar{y}\cdot \text{مساحت } D \Rightarrow \iint_D (ax+by+c)\,dA=(a\bar{x}+b\bar{y}+c)\cdot \text{مساحت } D$$

۶) اگر W ناحیه داخل کره به مرکز مبدأ و شعاع a یعنی ناحیه $x^2+y^2+z^2\leq a^2$ باشد: $(a>0)$

۱) $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dV=\frac{4\pi}{5}a^5$

۲) $\iiint_W x^2\,dV=\iiint_W y^2\,dV=\iiint_W z^2\,dV=\frac{1}{3}\times\frac{4\pi}{5}a^5$

۳) $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}\,dV=\frac{4\pi}{2\alpha+3}a^{2\alpha+3}$ $(2\alpha+3>0)$

۷) معمولاً (در محاسبه انتگرال روی خم یا محاسبه انحنا و $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ و ....) بهترین روش برای پارامتری کردن دایره، بیضی عبارت است از:

الف) $x^2+y^2=a^2$ دایره : $\vec{\alpha}(t)=(a\cos t, a\sin t)$; $0\leq t\leq 2\pi$

ب) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بیضی : $\vec{\alpha}(t)=(a\cos t, b\sin t)$; $0\leq t\leq 2\pi$

در عمل t همان θ قطبی است و لذا خم‌های بالا در جهت مثلثاتی طی می‌شوند.

۸) پاره خط با نقطه ابتدای A و نقطه انتهای B به صورت $\vec{\alpha}(t)=A+t\vec{AB}$ ، $0\leq t\leq 1$ پارامتری می‌شود که $\vec{AB}=B-A$ بردار هادی است.

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۲

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین(ویژه کنکور ۱۴۰۲) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/da1402
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/te1402
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی(بر اساس باکس مطالب مشابه) https://b2n.ir/mo1402
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/pa1402
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت https://b2n.ir/ta1402
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل https://b2n.ir/eq1402
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/fe1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۲ https://b2n.ir/wb1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۲ https://b2n.ir/wbb1402
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (تستهای کنکور ۹۶ تا ۱۴۰۱ رشته های مختلف) https://b2n.ir/ja1402
- جلسه اول کلاس درس و تست ریاضی عمومی (رایگان) https://b2n.ir/fd1402
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط(جلسه ۹ کلاس درس و تست) https://b2n.ir/fm1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه معادلات دیفرانسیل برای کنکور ۱۴۰۲ https://b2n.ir/we1402
- جلسه اول کلاس درس و تست معادلات دیفرانسیل (رایگان) https://b2n.ir/fu1402
- کارگاه رایگان حل آزمون آزمایشی اول موسسه نگاره https://b2n.ir/az4021
- جلسه اول کلاس نکته و تست ریاضی عمومی (رایگان) https://b2n.ir/ft1402
- کارگاه رایگان حل تست جامع معادلات(تستهای کنکور ۹۹ تا ۱۴۰۱ رشته های مختلف) https://b2n.ir/fr1402
- کارگاه جمع بندی رایگان انتگرال های ریاضی ۲ https://b2n.ir/fr1402

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوره ها خواهد داشت.
- ✓ برای ثبت نام از کد تخفیف PAYE10 استفاده نمایند تا از ٪۱۰ تخفیف اضافه تر بهره مند شوید.

توجه : در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت https://negareh.ac.ir/aghasi یا www.m-aghasi.ir یا https://b2n.ir/cs1402 یا کانال تلگرام @math_equation مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام @math_admin77 یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال : masoudaghasi1395@gmail.com