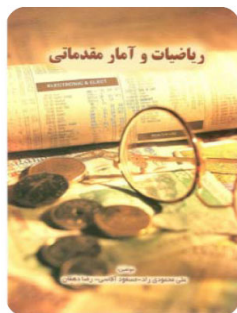


کلاس درس و تست ریاضی پایه



مدرس: مسعود آقاسی

@math_equation

www.m-aghasi.com

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۳

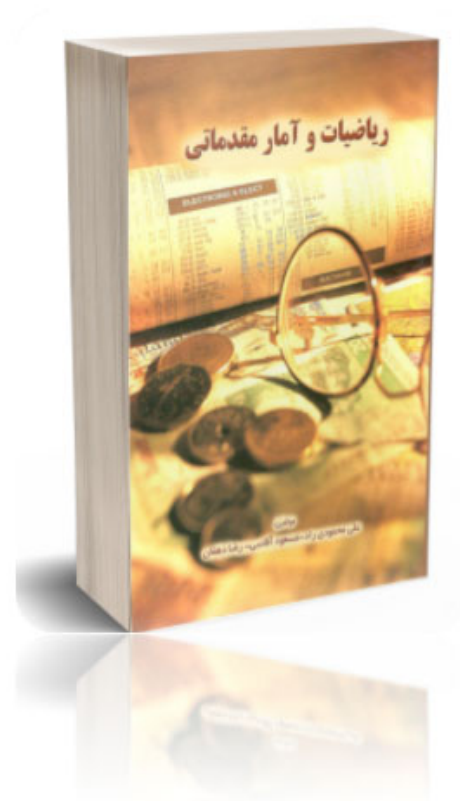
برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین (ویژه کنکور ۱۴۰۳) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- کلاس درس و تست ۱۵+۱۰ ساعته ریاضی عمومی <https://b2n.ir/da1403>
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعته ریاضی عمومی <https://b2n.ir/te1403>
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعته (بر اساس باکس مطالب مشابه) <https://b2n.ir/mo1403>
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعته ریاضی عمومی <https://b2n.ir/pa1403>
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت <https://b2n.ir/ta1402>
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعته معادلات دیفرانسیل <https://b2n.ir/eq1403>
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعته ریاضی عمومی <https://b2n.ir/fe1402>
- وینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۳ <https://b2n.ir/wb1403>
- وینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۳ <https://b2n.ir/wbb1403>
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (تستهای کنکور ۹۶ به بعد رشته های مختلف) <https://b2n.ir/ja1402>
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط (جلسه ۹ کلاس درس و تست) <https://b2n.ir/fm1402>

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعته کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوره ها خواهد داشت.
- ✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های (درس، نکته، جمع بندی، پکیج) از کد تخفیف **PAYE10** استفاده نمایند تا از ۱۰٪ تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

توجه: در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت <https://negareh.ac.ir/aghasi> یا www.m-aghasi.ir یا کانال تلگرام **@math_equation** مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام **@math_admin77** یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال: masoudaghasi1395@gmail.com



کتاب مرجع ریاضی پایه : ریاضی و آمار مقدماتی

مؤلفین : محمودی راد، آقاسی، دهقان (انتشارات نگاه دانش)

لینک خرید اینترنتی : <https://b2n.ir/791904>

ضرب دکارتی و رابطه

تعریف: اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}$ دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی $A \times B$ عبارت است از:

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

← مؤلفه اول (طول)
← مؤلفه دوم (عرض)

مجموعه $\{3, 1\} = \{1, 3\}$

زوج مرتب $(1, 3) \neq (3, 1)$

تعریف: منظور از رابطه $R: A \rightarrow B$ زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ می‌باشد (R : اعضای آن زوج‌های مرتب)

ضرب دکارتی $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 4\} \Rightarrow A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4)\}$

x y
 x y
 x y
 x y

$R_1 = \{(1, 1), (2, 4), (1, 4)\}$: رابطه R_1 از A به B

R_1 تابع نمی‌باشد. \rightarrow $1 \neq 4$

$R_2 = \{(1, 1), (2, 4)\}$: R_2 تابع است.

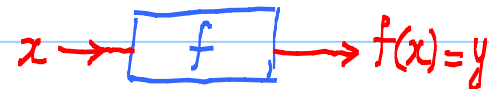
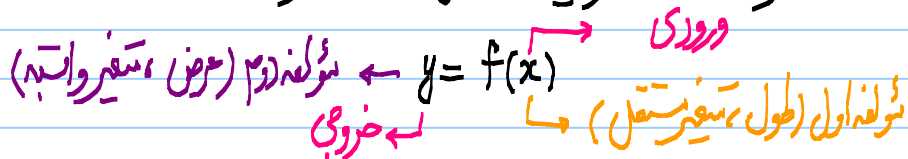
$R_2: A \rightarrow B$ رابطه $y = x^2$ صابطه: فنون بین x و y

تابع

تعریف ۱: تابع یعنی رابطه‌ای (مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب) که در آن هیچ عضوی مؤلفه اول برابر ندارند و در غیر اینصورت مؤلفه‌های دوم آن اعضا هم برابر باشند (عضوینداری)

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ و } (x_1, y_1) \in f \text{ و } (x_2, y_2) \in f$$

تعریف ۲: تابع $f: A \rightarrow B$ فاعده‌ای است که به هر $x \in A$ حاکم یک $y = f(x)$ از B متناظر کند.



تعریف ۳: اگر فرمولی بین x و y مفروض باشد آنگاه این فرمول، ضابطه یک تابع است اگر تنها اگر به ازای هر x حداکثر یک مقدار y حاصل گردد.

مثال. به ازای چند مقدار برای a رابطه $R = \{(\sqrt{2}, 0), (1, 2), (\sqrt{2}, a^2 + a), (2, 2), (1, 2 + a^2)\}$ یک تابع است؟

توضیح: هر دو عضو در R با مؤلفه اول برابر باید دارای مؤلفه دوم برابر باشند.

$$\begin{aligned} (1) \text{ و } (3) &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } a = -1 \\ 2 + a^2 = 3 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -1 \end{cases} \\ (2) \text{ و } (4) &\Rightarrow \end{aligned}$$

اشتراک $\rightarrow a = -1$ (۳) ✓

تعریف ۳ ← به ازای هر x باید حداکثر یک y داشته باشیم.

مثال. کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

(۱) $y^2 = x + 1$ (۲) $y = x + |x|$ (۳) $|x| + |y| = 1$ (۴) $x^2 + y^2 = 1$

گزینه ۱: $y^2 = x + 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x+1} \Rightarrow$ روابط x و y نیست تابع نیست

گزینه ۲: $y = x + |x| \Rightarrow$ تابع است \Rightarrow هر x دقیقاً یک y دارد (۲) ✓

گزینه ۳: $|x| + |y| = 1 \Rightarrow y = \pm(1 - |x|) \Rightarrow$ تابع نیست

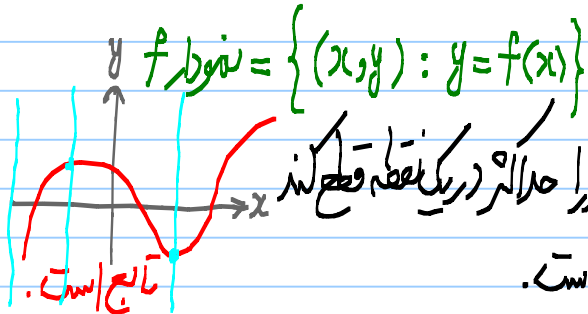
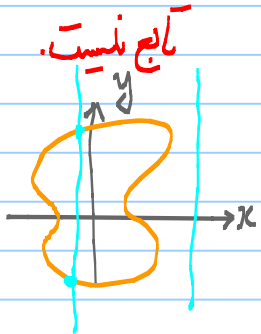
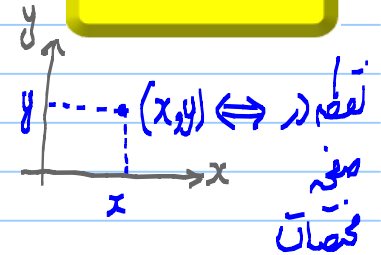
گزینه ۴: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$ تابع نیست

یادآوری: $u^n = a \Rightarrow u = \pm \sqrt[n]{a}$
 $a \geq 0$ و n زوج

یادآوری: $|u| = a \Rightarrow u = \pm a$
 $a \geq 0$

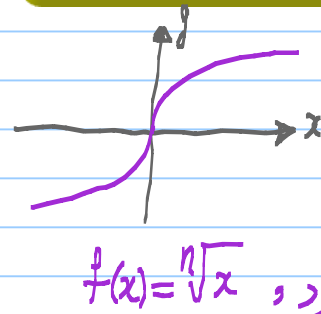
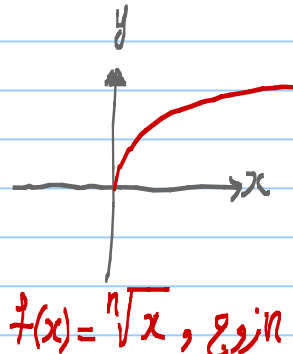
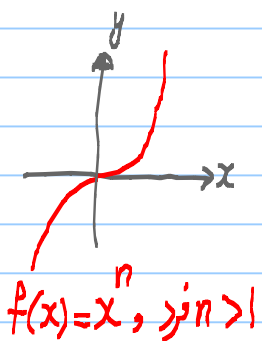
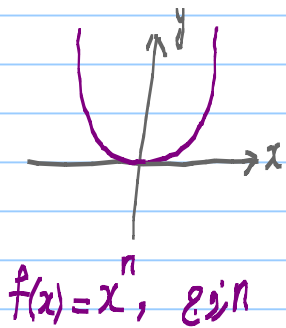
نمودار

هر رابطه (فرضی بین x و y) در صنف مختصات متخلف کننده یک نمودار است.



$f = \{(x, y) : y = f(x)\}$ نمودار f
اگر در یک نمودار، هر خط به موازات محور y ، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن نمودار، مربوط به تابع است.

نمودار چند تابع معروف و مهم



دامنه

منظور از دامنه تابع f یعنی D_f کلمه ورودی های مجاز f است یعنی همه اعداد حقیقی x که به ازای آنها $f(x)$ عددی حقیقی گردد.

$n =$ زوج
↑

محدودیت ۱: در توابع کسری، تابع در ریشه مجزج تعریف نمی شود.

روش محاسبه دامنه f
↓

محدودیت ۲: در توابع رادیکالی با فرض زوج، عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{g(x)}$

محدودیت ذاتی

n : زوج

..... (۴)

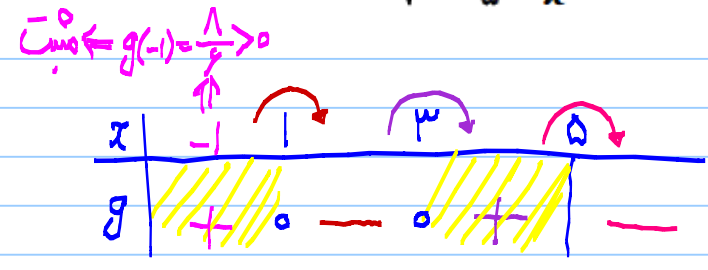
(۳)

حدودیت ذاتی ← تابع کسری (۱) تابع کسری (۲) رادیکالی فرض زوج

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{5 - x}}$ را به دست آورید.

دامنه: $\begin{cases} 5 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{(5 - x)} \geq 0 \end{cases}$

$x = 5$ ریشه نامرئی و باید تعیین علامت شود.



ریشه صریح: $x^2 - 4x + 3 = 0$ $a+b+c=0$ $x = 1, 3$

ریشه یک بار تکرار \rightarrow تغییر علامت داریم
ریشه یک بار تکرار \rightarrow تغییر علامت نداریم
ریشه یک بار تکرار \rightarrow تغییر علامت داریم

$D_f = (-\infty, -1] \cup [3, 5)$

تعیین علامت توابع

برای تعیین علامت $g(x)$ (کارتی، کسری، ...) مراحل زیر را طی کنید:

- ۱) همه ریشه ها و نامرئیگی و (ریشه غریب و ...) را محاسبه کنید و در جدول تعیین علامت به ترتیب بنویسید.
- ۲) از هر بازه عددی به دلخواه در تابع $g(x)$ جایگذاری کنید، علامتی که حاصل می شود، علامت کل بازه است.

روش دیگر: بعد از انجام مرحله (۱) فقط یکی از بازه ها را با عددگذاری تعیین علامت کنید و برای بازه مجاور صحیحی مرز بازه ریشه (صورت - خروج)

باید با توجه به مرتبه تکرار بازه مجاور تعیین علامت کنید. حول ریشه با مرتبه تکرار زوج تابع تغییر علامت نمی دهد اما

حول ریشه با مرتبه تکرار فرد تابع تغییر علامت می دهد.

مرتبه تکرار یعنی چه؟
توان هر عامل پس از تجزیه

$g(x) = (x - \sqrt{2})^1 (x + 1)^1 (x - 2)^1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}, -1, 2$

تکرار = ۱ \rightarrow فرد \rightarrow تغییر علامت می دهد
تکرار = ۱ \rightarrow فرد \rightarrow تغییر علامت می دهد
تکرار = ۲ \rightarrow فرد \rightarrow تغییر علامت می دهد
تکرار = ۲ \rightarrow زوج \rightarrow تغییر علامت نمی دهد

چند جمله ای درجه دوم

چند جمله ای از درجه n که $n \geq 0$: $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ و $a_k \in \mathbb{R}$
 تعریف: هر عبارت $f(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$ چند جمله ای درجه دوم است.

ریشه ها $x_1, x_2 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

دلتا $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد \rightarrow تغییر علامت نمی دهد
- $\Delta > 0 \Rightarrow$ دو ریشه حقیقی دارد \rightarrow ~~تغییر علامت~~ ^{تغییر علامت} ~~می دهد~~ ^{می دهد}
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ یک ریشه دارد \rightarrow ریشه مضاعف ^{تغییر علامت} ~~می دهد~~ ^{نمی دهد}

روابط ریشه ها $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

حالت خاص 1) $a+b+c=0 \Rightarrow x_1=1, x_2 = \frac{c}{a}$ 2) $a+c=b \Rightarrow x_1=-1, x_2 = -\frac{c}{a}$

تساوی دو تابع

دو تابع با هم مساوی اند $\left\{ \begin{array}{l} \text{دامنه دو تابع با هم برابر باشد.} \\ \text{مناظره دو تابع یکسان باشد.} \end{array} \right.$

(کشاورزی ۷۸)

مثال. کدام یک از توابع زیر با تابع $y = x + 2$ برابر است؟

(۲) $y = 2 + \sqrt{x^2}$ دامنه $x^2 \geq 0$ \Leftrightarrow دامنه \mathbb{R}

دامنه \mathbb{R}

(۱) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ دامنه $x \neq 2$

(۴) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

دامنه \mathbb{R}

(۳) $y = \frac{x^2 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$

دامنه \mathbb{R} \Leftrightarrow $(x+2)^2 \geq 0$ \Leftrightarrow همواره \Leftrightarrow دامنه \mathbb{R}

مخالف صفر \leftarrow

گزینه ۱: $y = 2 + \sqrt{x^2} = 2 + |x| = 2 \pm x \neq 2 + x$ ~~گزینه ۱~~
 و ~~گزینه ۴~~: $y = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| \neq x+2$

$\sqrt[n]{u^n} = |u|$ زوج n

$\sqrt[n]{u^n} = u$ فرد n

گزینه ۳: $y = \frac{x(x^2+1) + 2(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x+2)}{x^2+1} = x+2 =$ تابع \Rightarrow (۳) ✓

برد

تعریف: برد تابع f یعنی R_f همه خروجی‌های تابع

$$R_f = \{ f(x) : x \in D_f \}$$

روش‌های محاسبه برد:

۱) از معادله $y = f(x)$ متغیر x را بر حسب y محاسبه کنیم. تمام y های مجاز (یعنی y هایی که به ازای آنها x در D_f است) برد تابع خواهند بود.

۲) استفاده از نابرابری:

$$(a-1)^2 \geq 0$$

(نسای $a=1$) $a > 0$ و $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (الف)

(نسای $a=1$) $a < 0$ و $a + \frac{1}{a} \leq -2$ (ب)

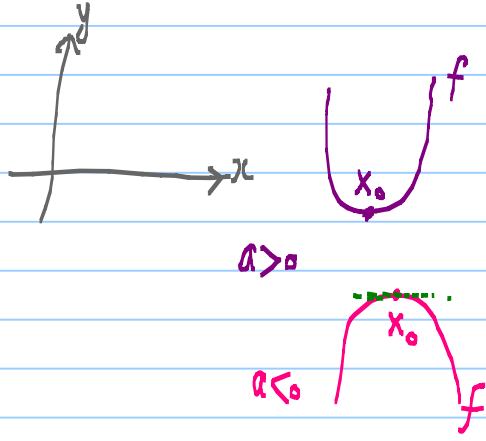
۳) برد تابع پیوسته، بازه بین معادری اکس‌تریم مطلق است. اگر f مینوای اکید باشد آنگاه R_f بازه بین معادری f در نقطه ابدال انتهای D_f است.

مثال. برد تابع $f(x) = x^2 + 4x + 1$ را محاسبه نمایید.

دامنه f برابر \mathbb{R} است. برای محاسبه برد از $y = f(x)$ x را بر حسب y محاسبه کردیم.

$$y = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x^2 + 4x + (1-y) = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4(y-1)}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$y \text{ های مجاز} \Rightarrow \Delta = 16 + 4y - 4 = 4y + 12 \geq 0 \Rightarrow y \geq -3 \Rightarrow R_f = [-3, +\infty)$$



نکته. نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ مربوط به سهمی است، رأس آن $x = -\frac{b}{2a}$ است.

1) $a > 0 \Rightarrow R_f = [f(x_0), +\infty)$

2) $a < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, f(x_0)]$

(۸۹ MBA)

مثال. برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$ کدام بازه است؟

~~$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$~~

~~$[1, \frac{3}{2}]$~~

$[1, 2]$ ✓

~~$[0, 2]$~~

$$1 \leq f(x) = \frac{(x^2+1) + 2x^2}{x^2+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^2+1} \leq 2$$

↑ 2x² $x \neq 0$ ↑ $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ✓

↑ بزرگی یا مساوی صفر

$a = x^2 > 0 \Rightarrow$ مخرج $= a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow R_f = [1, 2]$ (M✓)

ترکیب توابع

ترکیب توابع

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) = f \circ g(x)$$

$f \circ g$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g : g(x) \in D_f \right\} \text{ دامنه}$$

(مثال ۸۲)

مثال. اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ عبارت $f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ کدام است؟
تکرار f ۱۰۰ بار

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{2}{1+x}} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{2} \cdot (1+x) = \frac{1+x - 1 + x}{2} = x$$

ترکیب توابع

(۱) x (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $\frac{1-x}{1+x}$ (۴) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{100}$

نیاز به اول و دوم \leftrightarrow تابع هانی

$$f \circ f \circ f(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = f(x), \dots, \underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ بار}} = \begin{cases} f(x) & n \text{ فرد} \\ x & n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow n=100 \Rightarrow \text{زوج} \Rightarrow \text{پاسخ} = x \quad (1) \checkmark$$

(کشاورزی ۹۵)

مثال. اگر $f(x) = 4\sqrt{4x-x^2}$ باشد، دامنه $f \circ f$ کدام است؟

$$f \circ f(x) = f(f(x))$$

- (۱) $[0, 4]$
- (۲) $[0, 2 - \sqrt{3}]$
- (۳) $[2 + \sqrt{3}, 4]$
- (۴) $[0, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, 4]$

شرط ۱: $x \in D_f$ $\xrightarrow[\text{محدودیت ۲}]{\text{دامنه } D_f}$ $4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x = 0, 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$

شرط ۲: $f(x) \in D_f \Rightarrow 0 \leq 4\sqrt{4x-x^2} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4x-x^2} \leq 1$

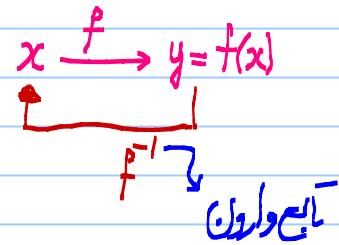
چون فروج $\sqrt{\quad}$ نامنفی است، این نابرابری برقرار است.

تابع پوشا (پوششی)

تابع $f: A \rightarrow B$ را پوشای نامیم اگر و تنها اگر $R_f = B$.

تعریف: اگر برای تابع f تابع وارون f^{-1} وجود داشته باشد که $f \circ f^{-1}(x) = x$ و $f^{-1} \circ f(x) = x$ آنگاه می‌گویم f معکوس‌پذیر است و f^{-1} را تابع معکوس f نامیده و با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم.

تابع وارون (تابع معکوس)



نکات (۱) f وارون‌پذیر است \Leftrightarrow یک به یک باشد.

$$(2) \quad f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{و} \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

(۳) نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه اند.

$$f(a) = b \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(b) = a$$

$$\downarrow \quad \uparrow$$

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

$$(4) \quad R_{f^{-1}} = D_f \quad \text{و} \quad D_{f^{-1}} = R_f$$

(۵) نمودار f و f^{-1} از نظر وضعیت یک‌نوازی مشابه‌اند.

(۶) طرز محاسبه f^{-1} : از نماد $y = f(x)$ ابتدا x را بر حسب y محاسبه کنید و سپس نقش x و y را عوض کنید.

(۸۹ MBA)

مثال. اگر $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ و $g(f(x)) = x$ ضابطه تابع $g(\frac{1}{x})$ کدام است؟

و تابع معکوس f است $\leftarrow f^{-1} = g$ را محاسبه کنید $\leftarrow g(\frac{1}{x}) = ?$

(۱) $\frac{2x}{2-x}$ (۲) $\frac{2}{1+2x}$ (۳) $\frac{x-2}{2x}$ (۴) $\frac{2}{2x-1}$

محاسبه f^{-1} : $y = f(x) = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = 2x \Rightarrow x(y-2) = -2y \Rightarrow x = \frac{2y}{2-y}$

تعویض x و y $\Rightarrow y = \frac{2x}{2-x} = f^{-1}(x) \Rightarrow g(x) = \frac{2x}{2-x}$

پاسخ $g(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{2}{2x-1}$ (۴) ✓

(فلسفه علم ۸۸)

مثال. اگر $f^{-1}(x) = x^2 + x$ و $h(x) = \frac{1}{2-f(x)}$ مقدار $h^{-1}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ کدام است؟

$h^{-1}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \alpha = ?$ $\xrightarrow{\text{بگیریم } h}$ $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = h(\alpha) = \frac{1}{2-f(\alpha)}$

(۱) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $3 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2-f(\alpha)} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2-f(\alpha) = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2} = 2-\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2-f(\alpha) = 2-\sqrt{2} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{بگیریم } f^{-1}}$ $\alpha = f^{-1}(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (۳) ✓

مثال. اگر $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $h(x) = \frac{1}{1+f(x)}$ دامنه h^{-1} کدام بازه است؟

(MBA و کشاورزی ۸۸) $\Rightarrow D_h^{-1} = R_h \Rightarrow h = \text{برده} = ?$

(۴) $[0, 1]$

(۳) $(0, 1]$

(۲) $[0, 1)$

(۱) $(0, 1)$

$\Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = ?$ کافی است R_f حساب کنید

$f^{-1} \text{ دامنه} \Rightarrow f \text{ بردار} : f(x) \geq 0 \Rightarrow 1 + f(x) \geq 1$ ← مثبت

$\Rightarrow 0 < h(x) = \frac{1}{1+f(x)} \leq 1 \Rightarrow R_h = (0, 1] = D_h^{-1}$ (۳) ✓

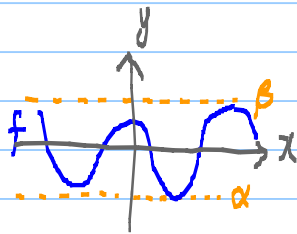
تابع کراندار

تعریف: تابع $f(x)$ را کراندار (محدود) می نامیم هرگاه اعداد حقیقی α و β موجود باشند

که برای هر x : $\alpha \leq f(x) \leq \beta$

و تعداداً عدد $M > 0$ موجود باشد که $|f(x)| \leq M$

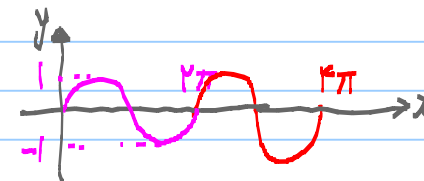
و تعداداً برد f محدود باشد.



f کراندار (محدود)

تابع متناوب

تعریف: تابع $f(x)$ را متناوب با دوره تناوب $T > 0$ می‌نامیم اگر به برای هر $x \in D_f$: $f(x+T) = f(x)$
به کوچکترین دوره تناوب f دوره تناوب اصلی f گفته می‌شود.



مثال: $f(x) = \sin x \Rightarrow f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$

متناوب $T=2\pi$ دوره تناوب اصلی است.

تذکره: اگر f متناوب با دوره تناوب T باشد، تابع f در بازه $[0, T)$ و $[T, 2T)$ و $[2T, 3T)$ و ... نمودارهای آن دارد.

نکته: (۱) تابع $\sin^{2n+1} ax$ و $\cos^{2n+1} ax$ دارای تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|a|}$ هستند. $a \neq 0$

(۲) تابع $\sin^{2n} ax$ و $\cos^{2n} ax$ ، $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ دارای دوره تناوب اصلی $\frac{\pi}{|a|}$ هستند.

(۳) تابع $\sin(ax) - \cos(ax)$ و $\sin(ax) + \cos(ax)$ دارای دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|a|}$ هستند.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^2 3x$ برابر دوره تناوب اصلی تابع $g(x) = \cos \frac{x}{a}$ است. $|a|$ برابر

ما توان فرد

۶ (۴)

۳ (۳)

↓ ما توان زوج

۱/۳ (۲)

است با:

۱/۶ (۱)

دوره تناوب f : $\frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$; دوره تناوب g : $\frac{2\pi}{|1/a|} = 2\pi|a|$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2\pi|a| \Rightarrow |a| = \frac{1}{6}$ (۱) ✓

تابع زوج و تابع فرد

تعریف ۱) تابع $f(x)$ را زوج می‌نامیم هرگاه D_f متقارن باشد (یعنی اگر $x \in D_f$ آنگاه $-x \in D_f$) و به ازای هر $x: f(x) = f(-x)$

۲) تابع $f(x)$ را فردی می‌نامیم هرگاه D_f متقارن باشد و به ازای هر $x: f(-x) = -f(x)$

$f(x) = x^2, [-1, 1]$

(دامنه متقارن) نه زوج، نه فرد است.

تعبیر هندسی:

۱) تابع $f(x)$ زوج است \Leftrightarrow نمودار f نسبت به محور y متقارن باشد.

۲) تابع $f(x)$ فرد است \Leftrightarrow نمودار f نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد.

تذکره: هم تابعی که هم زوج و هم فرد است تابع ثابت $f(x) = 0$ می‌باشد.

مثال. تابع $f(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{|x|x^2 - \cos x}$ تابعی است

یادآوری: $|x| = |-x|$

تابع زوج

$\cos(-x) = \cos x$

فرد (۴)

هم فرد و هم زوج (۳)

نه فرد و نه زوج (۲)

زوج (۱)

$$f(-x) = \frac{|-(x+1)| - |-(x-1)|}{|x|(-x)^2 - \cos(-x)} = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x|x^2 - \cos x} = -f(x) \checkmark$$

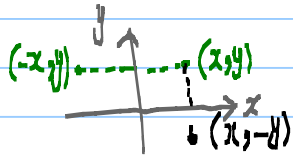
باید بررسی کنیم آیا D_f متقارن است؟

تابع فرد است \Rightarrow

$\checkmark D_f$ متقارن است \Rightarrow هر x که در این رابطه صدق کند آنگاه $-x$ صدق می‌کند $\Rightarrow |x|x^2 - \cos x \neq 0$ $\xrightarrow{\text{موردی که}} \text{تابع زوج است.}$

(۴) \checkmark

نکاتی در مورد تقارن



رابطه (تابع) به معادله $F(x, y) = 0$ معروف است.

۱) اگر در رابطه $x \rightarrow -x$ تبدیل گردد، قرینه نمودار F نسبت به محور y حاصل می‌شود و ضمیمه با تبدیل $x \rightarrow -x$ معادله نمودار F تغییر نکند. **نکته:** محور تقارن برای نمودار

۲) اگر در رابطه $y \rightarrow -y$ تبدیل گردد، قرینه نمودار F نسبت به محور x حاصل می‌شود و ضمیمه با تبدیل $y \rightarrow -y$ معادله نمودار F تغییر نکند. **نکته:** محور تقارن برای نمودار

۳) اگر در رابطه $x \rightarrow -x$ و $y \rightarrow -y$ تبدیل گردد، قرینه نمودار F نسبت به مبدأ مختصات می‌آید و ضمیمه با تبدیل $x \rightarrow -x$ و $y \rightarrow -y$ معادله نمودار F تغییر نکند. **نکته:** مبدأ مختصات مرکز تقارن

تعییم شماره (۱) \rightarrow ۴) اگر $x \rightarrow 2\alpha - x$ تبدیل گردد، قرینه نمودار نسبت به خط $x = \alpha$ بدست می‌آید و ضمیمه با $x \rightarrow 2\alpha - x$ معادله تغییر نکند. **نکته:** خط $x = \alpha$ محور تقارن

تعییم شماره (۲) \rightarrow ۵) اگر $y \rightarrow 2\beta - y$ تبدیل گردد، قرینه نمودار نسبت به خط $y = \beta$ بدست می‌آید و ضمیمه با $y \rightarrow 2\beta - y$ معادله تغییر نکند. **نکته:** خط $y = \beta$ محور تقارن

۶) اگر $x \rightarrow 2\alpha - x$ و $y \rightarrow 2\beta - y$ تبدیل گردد، قرینه نمودار نسبت به نقطه (α, β) بدست می‌آید و ضمیمه با $x \rightarrow 2\alpha - x$ و $y \rightarrow 2\beta - y$ معادله تغییر نکند. **نکته:** نقطه (α, β) مرکز تقارن نمودار

۷) اگر $x \rightarrow y$ و $y \rightarrow x$ تبدیل گردد، قرینه نمودار نسبت به خط $y = x$ بدست می‌آید و ضمیمه با $y \rightarrow x$ معادله عوض نگردد. **نکته:** خط $y = x$ محور تقارن است.

$F(x, y) = F(y, x)$

بسیار زیاده اول و دوم

تلفیق نقش x و y

مثال. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+2}$ نسبت به کدام خط متقارن است؟ (MBA، ایمنی صنعتی ۹۴)

$y = x$ (۴)

$x = 1$ (۳)

$x = -1$ (۲)

$x = -2$ (۱)

کدام گزینه محور تقارن f می باشد.

α را طوری بیابید که خط $x = \alpha$ محور تقارن f باشد. (۴) با تبدیل $x \rightarrow 2\alpha - x$ ضابطه $y = f(x)$ تغییر می کند. $f(2\alpha - x) = f(x) \Leftrightarrow$

$$f(2\alpha - x) = \sqrt[3]{2\alpha - x} - \sqrt[3]{2\alpha - x + 2} = -\sqrt[3]{x - 2\alpha} + \sqrt[3]{x - 2\alpha - 2} = f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + 2}$$

منفی ماکزیمم بگیرید و از زاویه اعمال بیرون بیایید. $x = \alpha$ محور تقارن

(۲) ✓ خط $x = -1$ محور تقارن است. $\Leftrightarrow \alpha = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha - 2 = 0 \\ -2\alpha = 2 \end{cases}$$

نکته (۱) تابع $f(x) = \sqrt[n]{x+a} - \sqrt[n]{x+b}$ اگر $n > 1$ فرد و \Leftrightarrow خط $x = -\frac{a+b}{2}$ محور تقارن است.

(۲) اگر $a+b=0$ یعنی $b=-a$ آنگاه f تابع زوج (و محور y محور تقارن f) است.

مطالب تدریس شده در قسمت اول ریاضی پایه

- صفحه ۱۶۱ الی ۱۷۴ و ۱۸۷ الی ۲۰۵ از کتاب ریاضی و آمار مقدماتی
- صفحه ۱۳ الی ۲۱ از جلد اول کتاب ریاضی ۱

تکالیف:

- حل سوالات (مثال یا تست) صفحه های تدریس شده از هر کتاب

مطالبی که در قسمت دوم ریاضی پایه تدریس می شود:

- توابع قدرمطلق، براکتی، نمایی و لگاریتمی

مشاوره و رفع اشکال :

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۳

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین (ویژه کنکور ۱۴۰۳) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- <https://b2n.ir/da1403> کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/te1403> کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/mo1403> جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی (بر اساس باکس مطالب مشابه)
- <https://b2n.ir/pa1403> پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/ta1402> ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت
- <https://b2n.ir/eq1403> کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل
- <https://b2n.ir/fe1402> ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی
- <https://b2n.ir/wb1403> وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۳
- <https://b2n.ir/wbb1403> وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۳
- <https://b2n.ir/ja1402> کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (تستهای کنکور ۹۶ به بعد رشته های مختلف)
- <https://b2n.ir/fm1402> کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط (جلسه ۹ کلاس درس و تست)

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوه ها خواهد داشت.
- ✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های (درس، نکته، جمع بندی، پکیج) از کد تخفیف **PAYE10** استفاده نمایند تا از ۱۰٪ تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

توجه: در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت <https://negareh.ac.ir/aghasi> یا www.m-aghasi.ir یا کانال تلگرام **@math_equation** مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام **@math_admin77** یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال: masoudaghasi1395@gmail.com