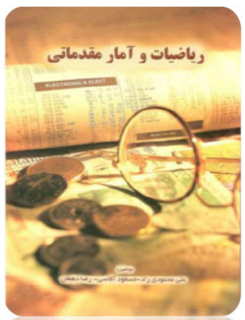
کلاس درس و تست ریاضی پایه



مدرس: مسعود آقاسی

@math_equation

www.m-aghasi.com

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۳

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین(ویژه کنکور ۱۴۰۳) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

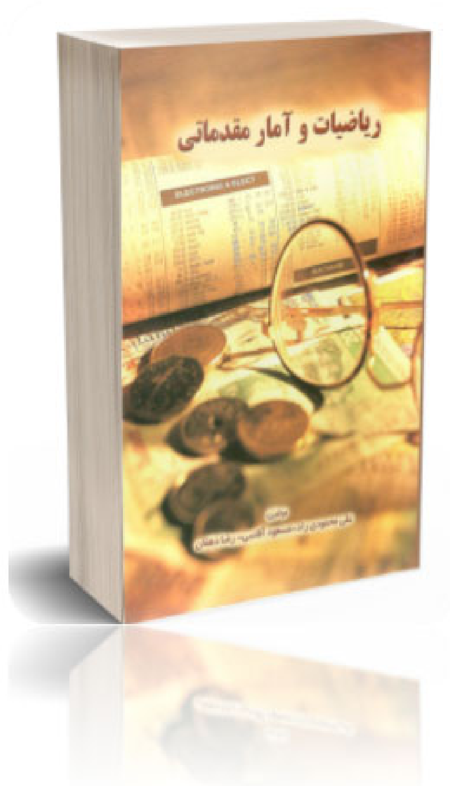
- کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/da1403
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/te1403
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی(بر اساس باکس مطالب مشابه) https://b2n.ir/mo1403
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/pa1403
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت https://b2n.ir/ta1402
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل https://b2n.ir/eq1403
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/fe1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۳ https://b2n.ir/wb1403
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۳ https://b2n.ir/wbb1403
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی(تستهای کنکور ۹۶ به بعد رشته های مختلف) https://b2n.ir/ja1402
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط(جلسه ۹ کلاس درس و تست) https://b2n.ir/fm1402

✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوه ها خواهد داشت.

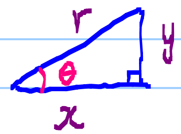
✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های *(درس، نکته، جمع بندی، پکیج)* از کد تخفیف PAYE10 استفاده نمایند تا ۱۰% تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

توجه : در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت https://negareh.ac.ir/aghasi یا www.m-aghasi.ir یا کانال تلگرام @math_equation مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام @math_admin77 یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال : masoudaghasi1395@gmail.com


ریاضیات و آمار مقدماتی

نسبت های مثلثاتی



$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$; $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$

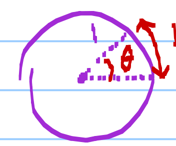
$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$

$\csc\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$; $\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$

نسبت های مثلثاتی زوایای معروف

θ برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
(عدد حقیقی) θ بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
✓ $\sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
✓ $\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
✓ $\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده $\frac{1}{0}=\infty$
$\cot\theta$	تعریف نشده $\frac{1}{0}=\infty$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰



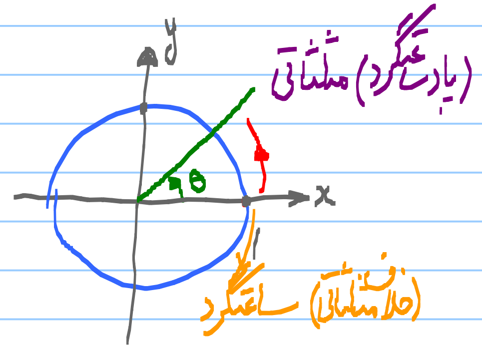
$\theta = 1\ \text{rad}$

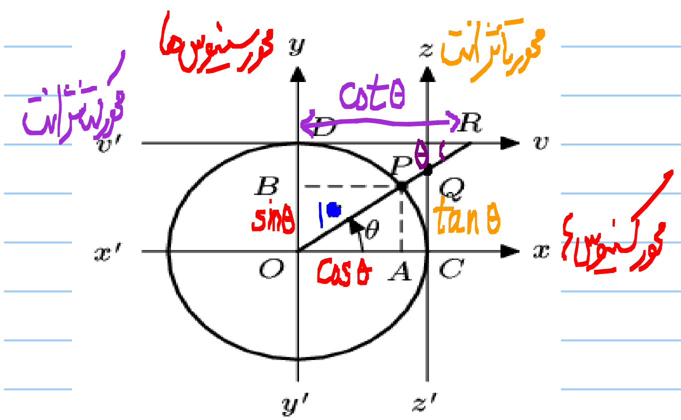
رادیان $= \frac{\pi}{180} \times$ درجه

درجه $=$ رادیان $\times \frac{180}{\pi}$

دایره مثلثاتی

دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ای است به شعاع یکی و به مرکز مبدأ که زوایا در آن در جهت مثلثاتی مثبت در نظر گرفته می‌شود.



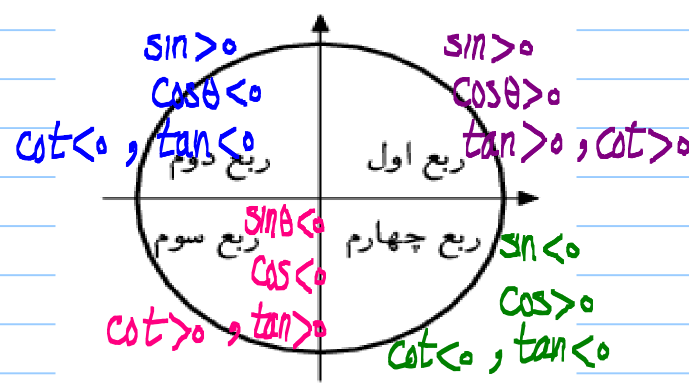


$OP=1 \Rightarrow$ دایره‌ی مثلثاتی

$\cos\theta = OA \quad , \quad \sin\theta = OB$

مثلث OCQ : $\tan\theta = \frac{CQ}{\cancel{OC}_{1}} \Rightarrow \tan\theta = CQ$

مثلث ODR : $\cot\theta = \frac{DR}{\cancel{OD}_{1}} \Rightarrow \cot\theta = DR$



برخی اتحادهای مثلثاتی

الف) اتحادهای اساسی

۱) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ۲) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ۳) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

ب) اتحادهای مجموع (تفاضل) دو زاویه $\alpha \pm \beta$

۴) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

۶) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha.\tan\beta}$

۵) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

مثال. مقدار $\cos\frac{\pi}{12}$ را محاسبه نمایید.

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \cos(\underset{\alpha}{\frac{\pi}{3}} - \underset{\beta}{\frac{\pi}{4}}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ج) اتحادهای دو برابر زاویه 2α

۷) $\sin(\underset{\alpha+\alpha}{2\alpha}) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

۸) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

۹) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ اتحاد طلایی ـ کاهش توان

۱۰) $tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ ۱۱) $\sin 2\alpha = \dfrac{2tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$ ۱۲) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

د) اتحادهای تبدیل جمع به ضرب

$$13)\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$14)\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$15)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$16)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

مثال. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\boxed{\dfrac{\sin(n+2)-\sin n}{\cos(n+2)+\cos n}}$ کدام است؟ فصل دنباله ـ طلبه ۱۰ (عمران، نقشه‌برداری ۹۸)

A

۱) ۰ ۲) $\tan 1$ ۳) $\cot 1$ ۴) موجود نیست.

$\alpha=n+2$
$\beta=n$

$$A=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\overset{(14)}{\underset{(15)}{=}}\frac{2\sin1\cdot\cancel{\cos(n+1)}}{2\cancel{\cos(n+1)}\cos1}=\tan1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}A=\boxed{\tan1}\qquad (2)\checkmark$$

مثال. حاصل $A=\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}$ برابر است با:

۱) $\tan x$ ۲) $\tan 2x$ ۳) $\cot x$ ۴) $\cot 2x$

$$A=\frac{(\overset{\alpha}{\sin x}+\overset{\beta}{\sin 3x})+\sin 2x}{(\underset{\alpha}{\cos x}+\underset{\beta}{\cos 3x})+\cos 2x}\overset{(13)}{\underset{(15)}{=}}\frac{2\sin2x\cos x+\sin2x}{2\cos2x\cos x+\cos2x}=\frac{\sin2x\,\cancel{(1+2\cos x)}}{\cos2x\,\cancel{(1+2\cos x)}}=\boxed{\tan2x}\qquad (2)\checkmark$$

هـ) اتحادهای تبدیل ضرب به جمع ← در فصل ۴ کاربرد دارند.

۱۷) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

۱۸) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

۱۹) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

و) نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$ که $k\in\mathbb{Z}$

$f\left(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha\right) = \underbrace{\pm f(\alpha)}_{k \text{ زوج}}$ یا $\underbrace{\pm \overset{*}{f}(\alpha)}_{k \text{ فرد}}$

* $\sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}-\alpha}_{\text{ربع ۱}}\right) = +\cos\alpha$; * $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = +\cot\alpha$

* $\sin\left(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ربع ۲}}\right) = +\sin\alpha$; * $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$; * $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

تذکر: در مکمل کردن یک زاویه، مقدار sin و csc تغییر نمی‌کند ولی سایر نسبت‌ها قرینه می‌شوند.

* $\sin\left(\underbrace{\frac{3\pi}{2}+\alpha}_{\text{ربع ۴}}\right) = -\cos\alpha$; * $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

* $\sin\left(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{ربع ۳}}\right) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$, $\tan(\pi+\alpha) = +\tan\alpha$

* $\sin(\underbrace{-\alpha}_{\text{ربع ۴}}) = -\sin\alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$

تذکر: توابع cos و sec تابع زوج اما tg و cot و sin و csc توابع فرد هستند.

مثال. حاصل $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$ را محاسبه کنید. $\longrightarrow A=?$

با توجه به اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ کافی است عبارت را در $\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم کنید

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\cdot A = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cancel{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cancel{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}}\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{7}}\left(-\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right) = -\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}$$

معادلات ساده مثلثاتی

۱) حل معادله $\sin x = t$ که $-1 \le t \le 1$: ابتدا زاویه α را طوری می‌یابیم که $\sin\alpha = t$ (یعنی $\alpha = \sin^{-1} t$)

همه جواب‌های معادله عبارتند از: $x = 2k\pi+\alpha\ ,\ 2k\pi+\pi-\alpha \quad (k\in\mathbb{Z})$

حالت خاص:
1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi+0\ ,\ 2k\pi+\pi \Rightarrow x = k\pi$ (ریشه ساده) یکبار تکراری شوند

2) $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{یکسان}} x = 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ریشه مضاعف

3) $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2} \xrightarrow{\text{یکسان}} x = 2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ریشه مضاعف

۲) حل معادله $\cos x = t$ که $-1 \le t \le 1$: ابتدا زاویه α را طوری می‌یابیم که $\cos\alpha = t$ (یعنی $\alpha = \cos^{-1} t$)

همه جواب‌های معادله عبارتند از: $x = 2k\pi \pm \alpha \quad (k\in\mathbb{Z})$

حالات خاص

۱) $\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ریشه ساده

۲) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \xrightarrow{\text{یکسان}} x = 2k\pi$ ریشه مضاعف

۳) $\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \pi \xrightarrow{\text{یکسان}} x = (2k+1)\pi$ ریشه مضاعف

۳) حل معادله $\tan x = t$ ، $t \in \mathbb{R}$: ابتدا زاویه α را طوری می‌یابیم که $\tan \alpha = t$ (یعنی $\alpha = \tan^{-1} t$)

همه جوابهای معادله عبارتند از: $x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

حالت خاص: $\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

تذکر: همه معادلات ساده مثلثاتی، دارای ریشه (جواب) با مرتبه تکرار یک (ریشه ساده) هستند مگر معادلات $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ که ریشه با تکرار ۲ (ریشه مضاعف) دارند

تابع حول جوابها تغییر علامت نمی‌دهد

مثال. جواب‌های معادله $\sin 2x - \cos x = 0$ را به دست آورید.

معادله $\Rightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0$

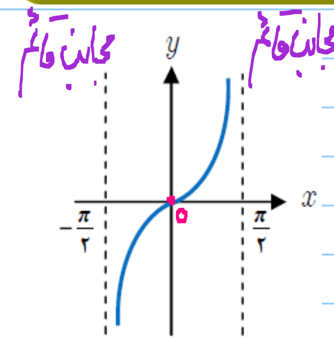
جواب:

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ , \ 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

بررسی توابع مثلثاتی و نمودار آنها

نمودارهای مثلثاتی را در یک دوره تناوب بررسی می‌کنیم.

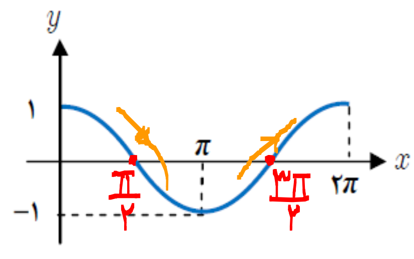


$y=\tan x$

متناوب با دوره تناوب اصلی $T=\pi$

تابع $\tan x$ فرد و بی‌کران ـ صعودی اکید بین مجانب

دامنه $=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ ؛ برد $=\mathbb{R}$

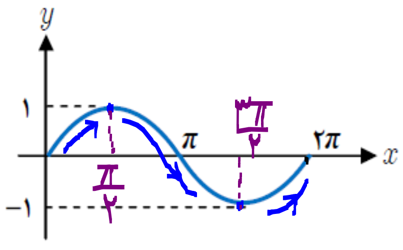


$y=\cos x$

متناوب با دوره تناوب اصلی $T=2\pi$

تابع $\cos x$ زوج و کراندار $|\cos x|\le 1$

دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=[-1,1]$

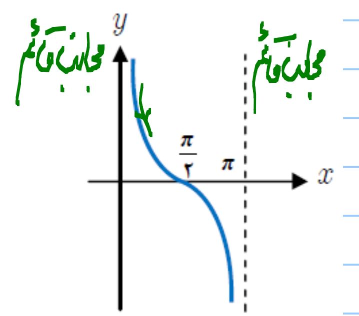


$y=\sin x$

دوره تناوب اصلی $T=2\pi$

تابع فرد است و کراندار $|\sin x|\le 1$

دامنه $=\mathbb{R}$ ؛ برد $=[-1,1]$

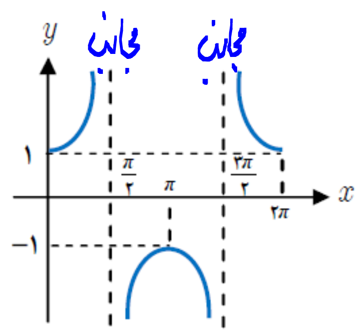


$y=\cot x=\frac{1}{\tan x}$

متناوب با دوره تناوب اصلی $T=\pi$

تابع $\cot x$ فرد و بی‌کران ـ نزولی اکید بین مجانب

دامنه $=\mathbb{R}-\{k\pi\}$ ؛ برد $=\mathbb{R}$



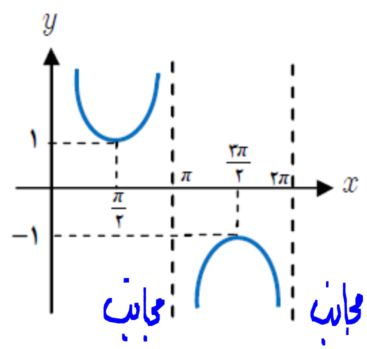
$y=\sec x$

بی‌کران $T=2\pi$

تابع زوج

دامنه $=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

برد $=\mathbb{R}-(-1,1)$



$y=\csc x$

تابع فرد و $T=2\pi$

دامنه $=\mathbb{R}-\{k\pi\}$

برد $=\mathbb{R}-(-1,1)$

مثال. اگر $f(x)=2\sqrt{x}-1$ و $g(x)=\cos^4 x$ جواب ~~کلی~~ معادله $(fog)(x)=0$ کدام است؟ (کشاورزی ۸۸)

همه جوابها

۱) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

ریشه‌های تابع fog

محاسبه: $fog(x)=f(g(x))=f(\cos^4 x)=2\sqrt{\cos^4 x}-1$

$=2\cos^2 x-1 \underset{\text{اتحاد شماره ۸}}{=} \cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$ —
- $\xrightarrow{k\text{ زوج}}$ $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ (۳) ✓
- $\xrightarrow{k\text{ فرد}}$ $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\ldots=(2k+1)\frac{\pi}{4}$ جواب جدید ندارد.

مثال. اگر برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ داشته باشیم $F(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x})=\cot x$ ضابطه $F(x)$ چقدر می‌شود؟ (صنایع ۸۹)

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۳) x ۴) $\frac{1}{x}$

الگو: $fog(x)=\checkmark$, $g(x)=\checkmark$, $f(x)=?$ —
- ۱) ابتدا $t=g(x)$ را حل کنید یعنی $x=g^{-1}(t)$ و در سمت راست جایگذاری کرده و سپس بجای متغیر t، x را قرار دهید.
- ۲) سعی کنید در سمت راست، عبارت $g(x)$ تولید کنید و سپس $g(x)$ را به x تبدیل کنید.

$\tan x>0$

$g(x)=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \overset{(9)}{=} \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\tan^2 x \Rightarrow F(\tan^2 x)=\cot x \xrightarrow{\text{ایده ۲}} =\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x}}$

$\sqrt{tg^2 x}=|tg x|=tg x$

$\Rightarrow F(\tan^2 x)=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x}} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ (۲) ✓

مثال. اگر $f(x)=\cos x$ و $gof(x)=1+\tan^2 x$ باشند، مقدار $gog(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟ (MBA ۸۷)

ابتدا $g(x)$ را محاسبه کنید.

۱) $3-2\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}-7$ ۳) $13-9\sqrt{2}$ ۴) $17-12\sqrt{2}$

ایده ۲: در عبارت gof باید $f(x)=\cos x$ را تولید کنید.

$$gof(x)=g(\cos x)=1+tg^2x \overset{(2)}{=} \sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{x^2} \rightarrow g(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{1}{2+1-2\sqrt{2}}$$

$$\text{پاسخ}=gog(\sqrt{2}-1)=g(g(\sqrt{2}-1))=g\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)=(3-2\sqrt{2})^2=9+8-12\sqrt{2}=\boxed{17-12\sqrt{2}}\quad (۴)✓$$

صعودی اکید ⇐ جهت نابرابری عوض نمی‌شود.

مثال. دامنه و برد $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ را تعیین کنید.

محاسبه دامنه: ۲ محدودیت ⇐ $2\sin x-1\geq 0$ تعیین علامت ⇐ روی تناوب $[0,2\pi]$ حل کنید.

ریشه: $\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ریشه ساده

تغییر علامت دارد.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$2\sin x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

دامنه: اجتماع بازه‌هایی که: $D_f=\left[2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ⇐ بازه $=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

برای محاسبه برد: کافی است ابتدا برد $2\sin x-1$ را محاسبه و سپس از جواب آن $\sqrt{\ }$ بگیریم.

$$\text{نمودار} \Rightarrow -1\leq \sin x\leq 1 \Rightarrow \cancel{-3}\ 0\leq 2\sin x-1\leq 1 \xrightarrow[\text{صعودی اکید}]{\sqrt{\ }} 0\leq\sqrt{2\sin x-1}\leq 1 \Rightarrow R_f=[0,1]$$

خروجی $\sqrt{\ }$ منفی نمی‌شود.

مثال. دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\underbrace{\sqrt{3x-x^2}}_{D_1}+\underbrace{\log(\cos\pi x)}_{D_2}$ کدام است؟ (کشاورزی ۸۴)

۱) $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ ۲) $[0,\frac{1}{2})\cup(2,\frac{5}{2})$

۳) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ ۴) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cup(2,3)$

دامنه اعمال جبری بین توابع $\Rightarrow$ اشتراک هم‌دامنه $=D_1\cap D_2$

✓ محاسبه D_1 $\xrightarrow{\text{محدودیت ۲}}$ $3x-x^2\geq 0$ $\xrightarrow[\text{ریشه}=0,3]{\text{تعیین علامت}}$ $0\leq x\leq 3$ $\Rightarrow D_1=[0,3]$

✓ محاسبه D_2 $\xrightarrow{\text{محدودیت ۳}}$ $\cos(\pi x)>0$ تعیین علامت

ریشه: $\cos(\pi x)=0\Rightarrow \pi x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=k+\frac{1}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ریشه ساده ⟵ تغییر علامت

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		3
$\cos(\pi x)$		$+$	0	$-$		0	$+$	0	$-$		

تعیین علامت را در D_1 انجام دهید.

$D_f=D_1\cap D_2=[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ (۱) ✓

مثال. اگر $f(x)=\log_3 x$ و $g(x)=\sqrt{1-2\sin x}$ باشد برد تابع fog کدام است؟ (کشاورزی ۸۷)

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-\frac{1}{2},0)$

ایده: برای محاسبه برد $fog(x)=f(g(x))$ کافی است برد تابع $f(x)$ را برای xهای خروجی (برد) تابع $g(x)$ (دامنه جدید برای f) محاسبه کنید.

g برد: $-1\leq\sin x\leq 1\Rightarrow \underbrace{-1\leq 1-2\sin x\leq 3}_{\text{مثبت قابل قبول}}$ $\xrightarrow[\text{صعودی اکید}]{\sqrt{\ }}$ $0\leq\sqrt{1-2\sin x}\leq\sqrt{3}\Rightarrow 0\leq g(x)\leq\sqrt{3}$ (*)

حال برد $\log_3 x$ را برای $0\leq x\leq\sqrt{3}$ محاسبه کنید یا معادلاً از نابرابری (*) $\log_3$ بگیرید.

صعودی اکید $\log_3$ $\Rightarrow$ $\log_3 0^+<\log_3 g(x)\leq\log_3\sqrt{3}^{\,3^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow -\infty<fog(x)\leq\frac{1}{2}\Rightarrow R_{fog}=(-\infty,\frac{1}{2}]$ (۲) ✓

مثال. اگر $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ و $g(x)=\cos^2 x$، تابع $f^{-1}(g(x))$ برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (کشاورزی ۷۶)

۱) $\ln\tan x$ ۲) $\ln\cot x$ ۳) $2\ln\cot x$ ۴) $2\ln\tan x$

در ربع اول

ابتدا f^{-1} را محاسبه کنید.

$$y=f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\Rightarrow ye^x+y=e^x\Rightarrow e^x(y-1)=-y$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{y}{1-y}\xrightarrow{\log_e=\ln} x=\ln\frac{y}{1-y}\xrightarrow{\text{تعویض نقش } x \text{ و } y} f^{-1}(x)=\ln\frac{x}{1-x}$$

$$\text{پاسخ}=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\cos^2x)=\ln\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}=\ln\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\ln(\cot^2x)$$

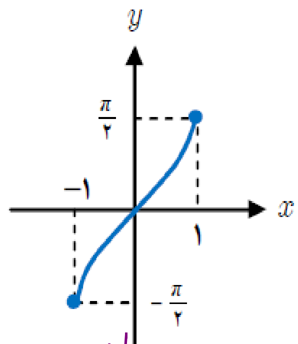
$$=2\ln|\underbrace{\cot x}_{\text{مثبت}}|=2\ln(\cot x)$$

(۳) ✓

توابع معکوس مثلثاتی (آرک)

توابع مثلثاتی در کل دامنه یک به یک نمی باشند اما می توان دامنه آنها را به بازه ای محدود کرد که یک به یک باشند و لذا تابع معکوس قابل تعریف باشد. (بازه که در مورد انتخاب آن قرارداد وجود دارد بازه مجاز می گوییم)

۱) اگر دامنه $y=\sin x$ را بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ در نظر بگیریم، تابع صعودی اکید با برد $[-1,1]$ می شود و لذا تابع معکوس خواهند داشت که آن را با نماد $\sin^{-1}x = \mathrm{Arcsin}\,x$ نمایش می دهیم:



$y=\sin^{-1}x$

تابع صعودی اکید – تابع فرد

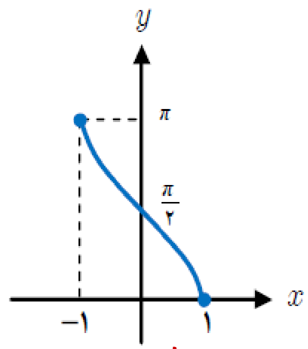
$$\sin^{-1}x=\alpha \iff \sin\alpha = x$$

دامنه $=[-1,1]$ $\quad$ $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ = بازه مجاز = برد

1) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

۲) صعودی اکید $\quad$ ۳) کراندار

۲) اگر دامنه $y=\cos x$ را بازه $[0,\pi]$ بگیرید، تابع نزولی اکید با برد $[-1,1]$ حاصل می شود پس دارای تابع معکوس $\cos^{-1}x=\mathrm{Arccos}\,x$ خواهد بود.



$y=\cos^{-1}x$

نزولی اکید – تابع نه زوج و نه فرد

$$\cos^{-1}x=\alpha \iff \cos\alpha = x$$

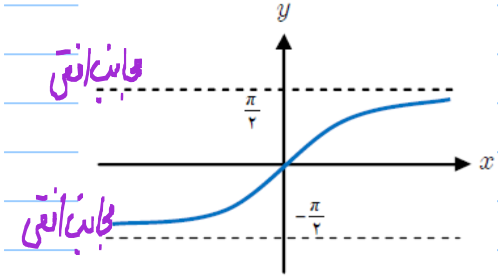
دامنه $=[-1,1]$ $\quad$ $\alpha\in[0,\pi]$ بازه مجاز = برد

1) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$ $\qquad$ 2) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

محدودیت ۳: عبارتی که از آن $\sin^{-1}$ یا $\cos^{-1}$ می گیریم باید در $[-1,1]$ باشد.

۳) برای تابع $y=\tan x$ اگر دامنه را بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ در نظر بگیریم، تابعی صعودی اکید و معکوس پذیر بدست می آید

تابع معکوس با نماد $\tan^{-1}x=\operatorname{Arctan}x$ نمایش می دهیم:



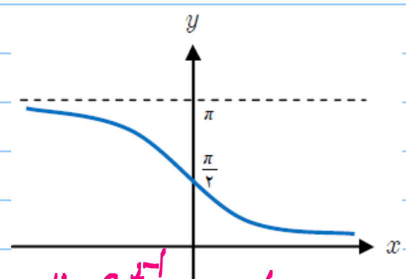
$$\tan^{-1}x=\alpha \iff \tan\alpha=x$$

دامنه $=\mathbb{R}$ $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ بازه مجاز = برد

۱) $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ ۲) کراندار

۴) برای تابع $y=\cot x$ اگر دامنه را بازه $(0,\pi)$ در نظر بگیریم، تابع نزولی اکید و لذا معکوس پذیر بدست می آید

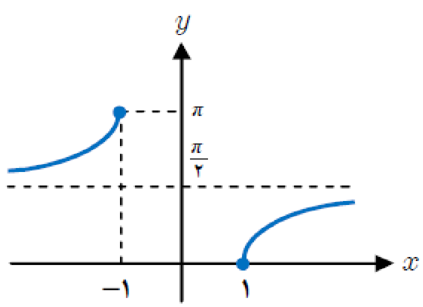
که آن را با نماد $\cot^{-1}x=\operatorname{Arccot}x$ نمایش می دهیم:



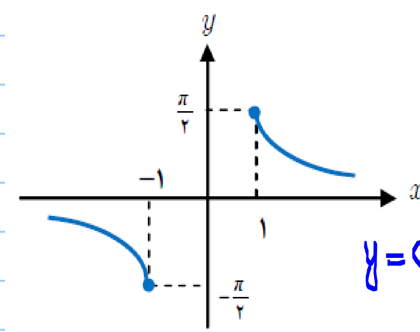
$$\cot^{-1}x=\alpha \iff \cot\alpha=x$$

دامنه $=\mathbb{R}$ $\alpha\in(0,\pi)$ بازه مجاز = برد

۱) $\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}x$ ۲) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ ۳) $\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x$ $(x>0)$



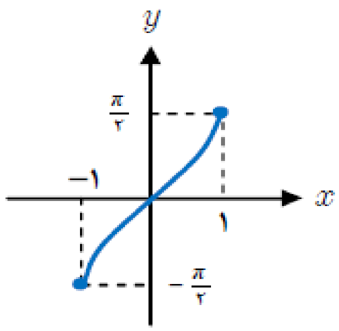
$y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$



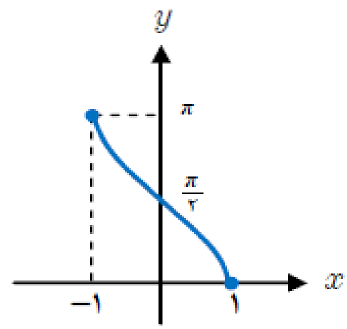
$y=\csc^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$

نمودار توابع معکوس مثلثاتی

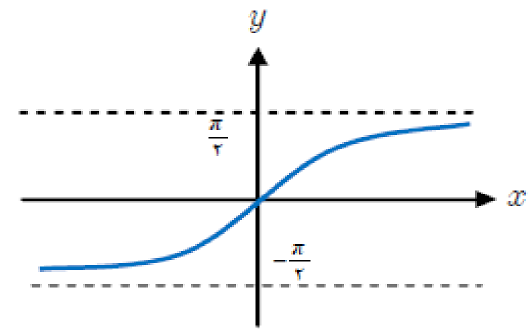
با قرینه کردن نمودار تابع مثلثاتی (در بازه) نمودار توابع آرک مثلثاتی حاصل می‌شوند.



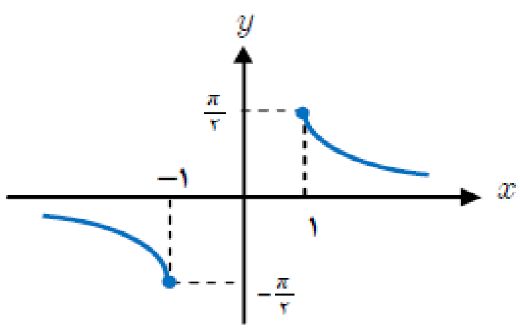
$y = \mathrm{Arc}\sin x$



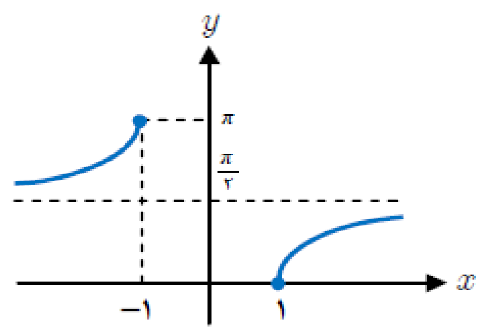
$y = \mathrm{Arc}\cos x$



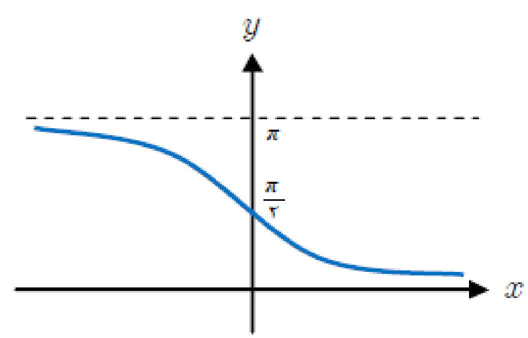
$y = \mathrm{Arc}\tan x$



$y = \mathrm{Arc}\csc x$



$y = \mathrm{Arc}\sec x$



$y = \mathrm{Arc}\cot x$

مثال. $\tan(\mathrm{Arctan}\frac{1}{9}+\mathrm{Arctan}\frac{4}{5})$ برابر است با: (مکانیک ۷۵)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

$\alpha=tg^{-1}\frac{1}{9}$, $\beta=tg^{-1}\frac{4}{5}\Rightarrow tg\beta=\frac{4}{5}$

$tg\alpha=\frac{1}{9}$

پاسخ $=tg(\alpha+\beta)\overset{\text{اتحاد}}{=}\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\frac{1}{9}+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{\frac{41}{45}}{\frac{41}{45}}=1$ (۲)✓

مثال. مقدار دقیق $\sec\left(\sin^{-1}(-\frac{3}{4})\right)$ کدام است؟ (صنایع ۸۸)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{7}}$ ۴) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

α: ربع چهارم

بازه‌ی جواب = ربع ۱ یا ۴

$\alpha=\sin^{-1}(-\frac{3}{4})\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{4}$

اتحاد ۱ : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cancel{-\frac{\sqrt{7}}{4}}$

پاسخ $=\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{7}}}$ (۳)✓

مثال. اگر $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$ در این صورت $\mathrm{Arcsin}(\cos 2x)$ برابر است با: (مکانیک ۷۷، MBA ۸۵)

~~۱)~~ $\frac{\pi}{2}-2x$ ~~۲)~~ $\frac{3\pi}{2}-2x$ ~~۳)~~ $2x-\frac{\pi}{2}$ ۴)✓ $2x-\frac{3\pi}{2}$

روش ۱ (ردگزینه)

$x=\pi\Rightarrow\sin^{-1}(\cos 2\pi)=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$ گزینه ۴ ✓

روش ۲. چون $\sin^{-1}$ و $\sin$ در بازه مجاز باهم ساده می‌شوند پس کافی $\cos 2x$ را برحسب $\sin 2x$ بنویسیم: (اعلام کردن) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

$\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - 2x \le -\frac{\pi}{2}$

پس نمی‌توان $\sin^{-1}$ و $\sin$ را ساده کرد.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x \Rightarrow \sin(\underbrace{2x - \frac{3\pi}{2}}_{\alpha}) = \cos 2x$ بازه مجاز $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

پاسخ $= \sin^{-1}(\sin(\underbrace{2x - \frac{3\pi}{2}}_{\alpha})) = \alpha = 2x - \frac{3\pi}{2}$ (۴)✓

یادآوری:

۱) $\sin^{-1}(\sin \alpha) = \alpha \;;\; -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

۲) $\cos^{-1}(\cos \alpha) = \alpha \;;\; 0 \le \alpha \le \pi$

⋮

مثال. دامنه تابع $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ کدام است؟ (کشاورزی ۹۳)

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۴) ϕ

محدودیت ۲ $\Rightarrow -1 \le \frac{1}{\sin x} \le 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sin x}\right| \le 1 \Rightarrow |\sin x| \ge 1 \xrightarrow{|\sin x| \le 1} |\sin x| = 1$

$\Downarrow$

$\sin x = 1$ و -1

$2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $\xRightarrow{\text{یک فرمول}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲)✓

محدودیت ۱ $\Rightarrow \sin x \ne 0$ ← برقرار است.

مثال. دامنه تابع $y = \mathrm{Arcsin}(\ln \frac{x}{۲})$، کدام است؟ (علوم اقتصادی ۹۸)

۱) $(۱,۲e)$ ۲) $(۲e^{-۱},۱)$ ۳) $[e^{-۱},e]$ ۴) $[۲e^{-۱},۲e]$

محدودیت ۴ : $-1 \le \ln\frac{x}{۲} \le 1 \Rightarrow \cancel{\ln} e^{-1} \le \cancel{\ln}\frac{x}{۲} \le \cancel{\ln} e \xrightarrow[\text{صعودی اکید } e>1]{\ln = \log_e} e^{-1} \le \frac{x}{۲} \le e \Rightarrow ۲e^{-1} \le x \le ۲e$ ①

جهت نابرابری عوض نمی‌شود

محدودیت ۳ : $\frac{x}{۲} > 0 \Rightarrow x > 0$ ②

$$۲,۱ \text{ اشتراک } \Rightarrow D_f = [۲e^{-1}, ۲e] \qquad (۴)\checkmark$$

مثال. حاصل عبارت $f(x) = \sin^{-۱}(x^۲+۲x+۲)+\tan^{-۱}\sqrt{۲-x}$ کدام است؟ (کشاورزی ۹۲)

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

f دامنه $\Rightarrow \begin{cases} -1 \le x^۲+۲x+۲ \le 1 \xRightarrow{\text{مربع کامل کردن}} \boxed{-1 \le} (x+1)^۲ + 1 \le 1 \Rightarrow (x+1)^۲ \le 0 \Leftrightarrow (x+1)^۲ = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ ۲ - x \ge 0 \Rightarrow x \le ۲ \end{cases}$

بدیهی — نامنفی — مثبت — نامنفی ≥ 0

$$D_f = \{-1\} \Rightarrow f(-1) = \sin^{-1} 1 + \tan^{-1}\sqrt{۳} = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳} = \boxed{\frac{۵\pi}{۶}} \qquad (۱)\checkmark$$

مثال. دامنه و برد تابع $f(x)=\text{Arccos}\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ را به دست آورید.

برقرار است — نامنفی

محاسبه دامنه $\xrightarrow[\text{محدودیت ۲}]{\text{محدودیت ۱}}$ $\begin{cases} \boxed{-1\le}\sqrt{x+\frac{1}{2}}\le 1 \Rightarrow \sqrt{x+\frac{1}{2}}\le 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+\frac{1}{2}\le 1 \Rightarrow x\le\frac{1}{2} \\ x+\frac{1}{2}\ge 0 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{2} \end{cases}$

اشتراک : $D_f=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

محاسبه برد : $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2} \Rightarrow 0\le x+\frac{1}{2}\le 1 \xRightarrow[\text{صعودی اکید}]{\sqrt{}} 0\le\sqrt{x+\frac{1}{2}}\le 1 \xrightarrow{\cos^{-1}x\ \text{نزولی اکید}} \overset{\frac{\pi}{2}}{\cancel{\cos^{-1}0}}\ge\cos^{-1}\sqrt{\dots}\ge\overset{0}{\cancel{\cos^{-1}1}}$

$0\le f(x)\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow R_f=[0,\frac{\pi}{2}]$

مثال. برد تابع $f(x)=\sin^{-1}\sqrt{x-x^{2}}$ کدام است؟ (کشاورزی ۸۵)

۱) $[0,\frac{\pi}{3}]$ ۲) $[0,\frac{\pi}{6}]$ ۳) $[0,\frac{\pi}{4}]$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2}]$

مرحله ۱ برد تابع $y=x-x^2$ را محاسبه کنید ($a=-1<0$) $\xrightarrow[\text{نکته}]{\text{سهمی}}$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$

$y(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow x-x^2\le\frac{1}{4}$

مرحله ۲ : $\sqrt{}$ صعودی اکید و جهت عوض نمی‌شود $\Rightarrow 0\le\sqrt{x-x^2}\le\frac{1}{2}$ (نامنفی)

مرحله ۳ : " " صعودی اکید $\sin^{-1}$ $\Rightarrow \underset{0}{\cancel{\sin^{-1}0}}\le\underset{f(x)}{\sin^{-1}\sqrt{\dots}}\le\underset{\frac{\pi}{6}}{\cancel{\sin^{-1}\frac{1}{2}}} \Rightarrow R_f=[0,\frac{\pi}{6}]$ (۲) ✓

مطالب تدریس شده در قسمت سوم ریاضی پایه

- صفحه ۲۱۶ الی ۲۴۵ از کتاب ریاضی و آمار مقدماتی
- صفحه ۲۳ الی ۳۰ از جلد اول کتاب ریاضی ۱

تکالیف:

- حل سوالات (مثال یا تست) صفحه های تدریس شده از هر کتاب

مطالبی که در قسمت چهارم(آخر) ریاضی پایه تدریس می شود:

- توابع هیپربولیک و معکوس آنها

مشاوره و رفع اشکال :

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۳

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین(ویژه کنکور ۱۴۰۳) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/da1403
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/te1403
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی(بر اساس باکس مطالب مشابه) https://b2n.ir/mo1403
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/pa1403
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت https://b2n.ir/ta1402
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل https://b2n.ir/eq1403
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی https://b2n.ir/fe1402
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۳ https://b2n.ir/wb1403
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۳ https://b2n.ir/wbb1403
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی(تستهای کنکور ۹۶ به بعد رشته های مختلف) https://b2n.ir/ja1402
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط(جلسه ۹ کلاس درس و تست) https://b2n.ir/fm1402

✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوره ها خواهد داشت.

✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های *(درس، نکته، جمع بندی، پکیج)* از کد تخفیف PAYE10 استفاده نمایند تا ۱۰٪ تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

توجه : در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت https://negareh.ac.ir/aghasi یا www.m-aghasi.ir یا کانال تلگرام @math_equation مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام @math_admin77 یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال : masoudaghasi1395@gmail.com