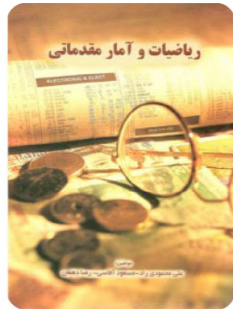


کلاس درس و تست ریاضی پایه



مدرس: مسعود آقاسی

@math_equation

www.m-aghasi.com

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۳

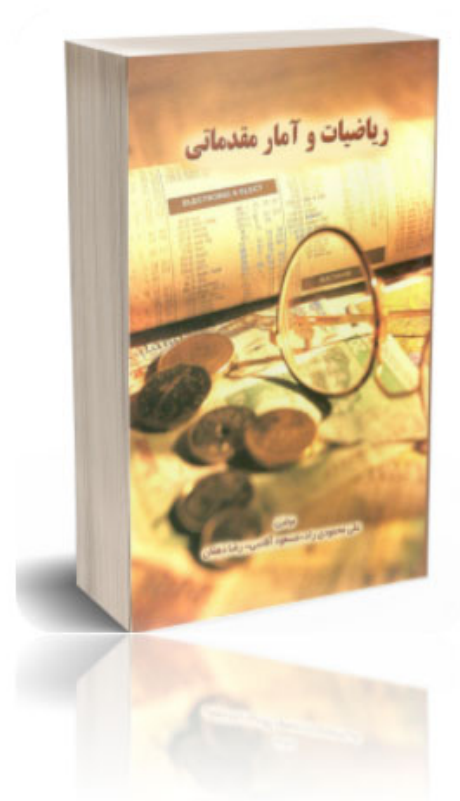
برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین (ویژه کنکور ۱۴۰۳) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/da1403>
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/te1403>
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی (بر اساس باکس مطالب مشابه) <https://b2n.ir/mo1403>
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/pa1403>
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت <https://b2n.ir/ta1402>
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل <https://b2n.ir/eq1403>
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/fe1402>
- وینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۳ <https://b2n.ir/wb1403>
- وینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۳ <https://b2n.ir/wbb1403>
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (نستهای کنکور ۹۶ به بعد رشته های مختلف) <https://b2n.ir/ja1402>
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط (جلسه ۹ کلاس درس و تست) <https://b2n.ir/fm1402>

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوره ها خواهد داشت.
- ✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های (درس، نکته، جمع بندی، پکیج) از کد تخفیف PAYE10 استفاده نمایند تا از ۱۰٪ تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

توجه: در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت <https://negareh.ac.ir/aghasi> یا www.m-aghasi.ir مراجعه کنید.
یا کانال تلگرام @math_equation مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام @math_admin77 یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال: masoudaghasi1395@gmail.com



کتاب مرجع ریاضی پایه: ریاضی و آمار مقدماتی

مؤلفین: محمودی راد، آقاسی، دهقان (انتشارات نگاه دانش)

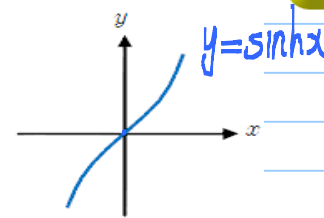
لینک خرید اینترنتی: <https://b2n.ir/791904>

توابع هیپربولیک و نمودار آنها

$e \approx 2,7$ عددی

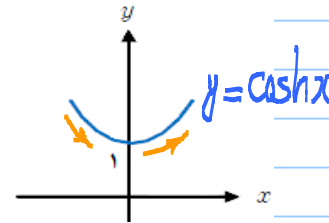
1) $shx = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ معرزی آید ✓

تابع فرد و برد = \mathbb{R} و دامنه = \mathbb{R}



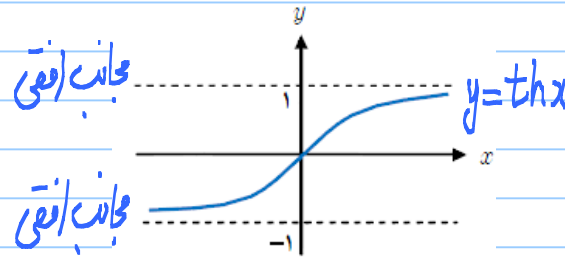
2) $chx = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ تابع زوج

تابع فرد و برد = $[1, +\infty)$ و دامنه = \mathbb{R}



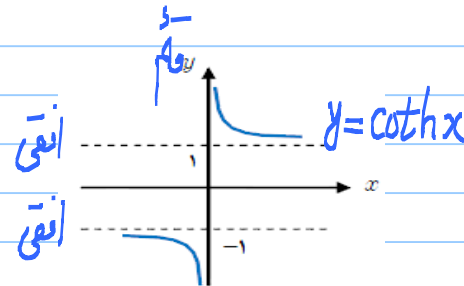
3) $thx = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

تابع معرزی آید، تابع فرد و برد = $(-1, 1)$ و دامنه = \mathbb{R}



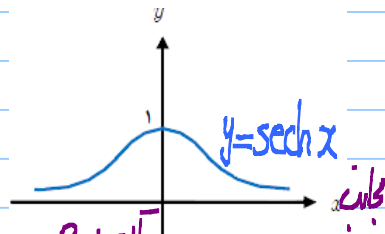
4) $coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$ تابع فرد

تابع فرد و برد = $\mathbb{R} - \{0\}$ و دامنه = $\mathbb{R} - \{0\}$



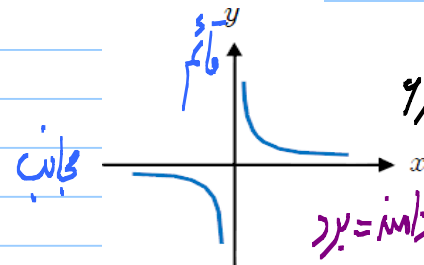
5) $sech x = \frac{1}{\cosh x}$

تابع زوج؛ برد = $(0, 1]$ و دامنه = \mathbb{R}



6) $csch x = \frac{1}{\sinh x}$

تابع فرد؛ برد = دامنه = $\mathbb{R} - \{0\}$



مثال. جواب معادله $3 \sinh x + \frac{9}{5} \cosh x = -\frac{9}{5}$ برابر است با:

(برق ۷۶)

$x = \ln 2$ (۴)

$x = -\ln 4$ (۳)

$x = \ln 4$ (۲)

$x = -\ln 2$ (۱)

تعریف هیپربولیک بر حسب نمایی: $\frac{3}{5}(e^x - e^{-x}) + \frac{9}{5}(e^x + e^{-x}) = -\frac{9}{5} \Rightarrow \frac{12}{5}e^x - \frac{3}{5}e^{-x} = -\frac{9}{5}$ ضرب در e^x $4e^{2x} - 1 = -3e^x$

معادله درجه دوم بر حسب e^x : $4e^{2x} + 3e^x - 1 = 0 \Rightarrow 4t^2 + 3t - 1 = 0$ حل $\Rightarrow t = \frac{1}{4}, -1$

$e^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \ln \frac{1}{4} = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$ (۳) ✓

معمولاً اگر در آیاتهای مثلثاتی $\sin \rightarrow -i \sinh$ ، $\cos \rightarrow \cosh$ ، $\tan \rightarrow -i \tanh$ ، آیات دیگری هیپربولیک بدست می آید.
 $i = \sqrt{-1}$ ، $i^2 = -1$

برخی اتحادهای هیپربولیک

✓ ۱) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

۲) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

۳) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$ (مکانی ۹۲)

۴) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$ (مکانی ۹۲)

۵) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

✓ ۶) $\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$ ، $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

✓ ۷) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

مثال. اگر $\cosh x = \sec \theta$ و $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ و $x > 0$ حاصل $\tanh x$ برابر است با:

$\sin \theta$ (۱) $-\sin \theta$ (۲) ^{مثبت} $\pm \sin \theta$ (۳) $-\cos \theta$ (۴)

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = \sec^2 \theta - 1 \stackrel{\text{مقلاتی}}{=} \tan^2 \theta \Rightarrow \sinh x = \pm \tan \theta$ ^{مثبت} $\Rightarrow \sinh x = \tan \theta$ $\Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \tan \theta \cdot \cos \theta = \sin \theta$

$\Rightarrow \sinh x = -\tan \theta \Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{-\tan \theta}{\sec \theta} = -\tan \theta \cdot \cos \theta = -\sin \theta$

$\tan \theta < 0 \Rightarrow$ در ربع ۴ دایره مثلثاتی
(۲) ✓

چون توابع هیپر بولیک، نمایی هستند، پس تابع معکوس از آنها لگاریتمی \ln خواهد هستند.

قرارداد: برای $\cosh x$ و $\operatorname{sech} x$ دامنه را $(-\infty, +\infty)$ در نظر بگیرید تا تابع معکوس داشته باشد.

۱) $\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ دامنه $= \mathbb{R}$ و برد $= \mathbb{R}$

توابع معکوس هیپر بولیک

اشکات (روش تابع معکوس): از معادله $y = \sinh x$ کانی است x بر حسب y حساب کنید پس نقش x و y را عوض کنید.

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$

$\Rightarrow t = e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$ $\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ \Rightarrow تعویض نقش x و y \Rightarrow $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ \Rightarrow $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ \Rightarrow $e^x = \frac{1+y}{1-y}$ $\Rightarrow x = \ln \frac{1+y}{1-y}$

۲) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ دامنه $= [1, +\infty)$ و برد $= [0, +\infty)$

۳) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

دامنه $= (-1, 1)$ و برد $= \mathbb{R}$

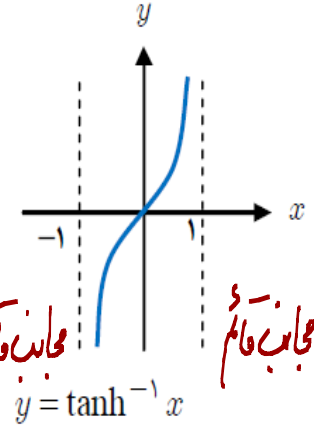
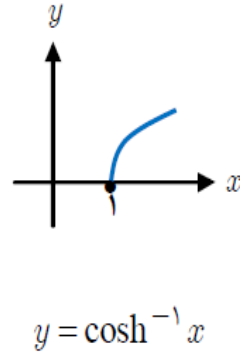
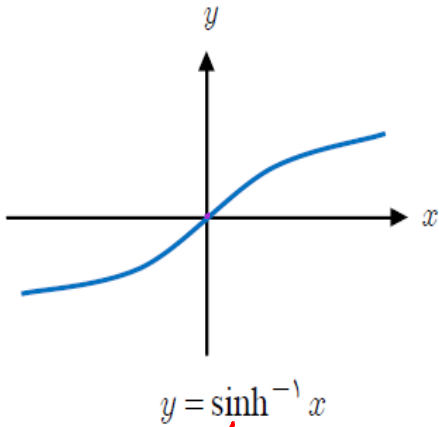
۴) $\operatorname{coth}^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$; $|x| > 1$

۵) $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$; $0 < x \leq 1$

۶) $\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$; $x \neq 0$

نمودار توابع معکوس هیپربولیک

با فرسنگ کردن نمودار هیپربولیک نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس بدست می آید.



حدودیت زانی ۵

حدودیت زانی ۶

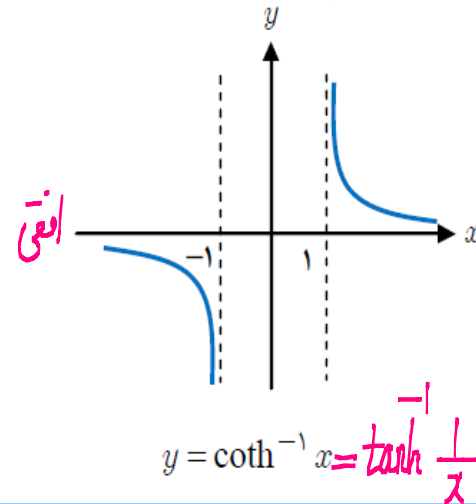
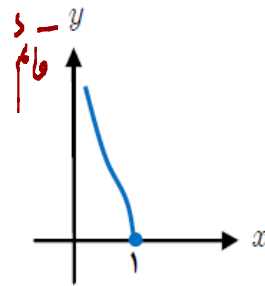
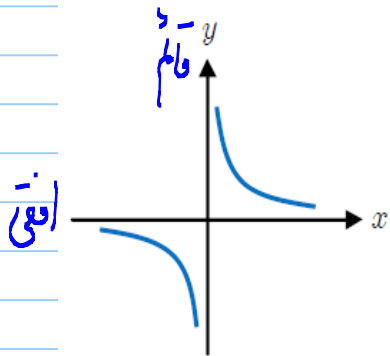
جانب قائم

جانب قائم

تابع فرد، صعودی آید؛ دامنه و برد $(-\infty, +\infty)$

نیز زوج و نه فرد، صعودی آید
دامنه $[1, +\infty)$ و برد $(-\infty, +\infty)$

تابع فرد، صعودی آید
دامنه $(-1, 1)$ و برد $(-\infty, +\infty)$



تابع فرد و دامنه و برد $\mathbb{R} - \{0\}$

نیز زوج آید
دامنه $(0, 1]$ و برد $(-\infty, +\infty)$

تابع فرد؛ دامنه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ و برد $(-\infty, +\infty)$

(کشاورزی ۸۵)

مثال. حاصل $(\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3})^{th^{-1}}$ برابر $\ln A$ است. A کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad (۴) \qquad \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad (۳) \qquad \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad (۲) \quad \text{tanh}^{-1} \quad \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad (۱) \\ & \text{پایه} = \text{tanh}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} \stackrel{(۳)}{=} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \stackrel{\text{گویا کردن}}{=} \frac{1}{2} \ln \frac{(3+\sqrt{3})^2}{3^2-3} = \frac{1}{2} \ln \frac{9+3+6\sqrt{3}}{6} \\ & = \frac{1}{2} \ln (2+\sqrt{3}) = \ln \sqrt{2+\sqrt{3}} = \ln A \Rightarrow A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad (۱) \checkmark \end{aligned}$$

(کشاورزی ۹۱)

مثال. نمودار کدام تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است؟

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (۲) تابع فرد $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (۱)

$f(x) = 2x + |x|$ (۴) $f(x) = 3^x + (\frac{1}{3})^x$ (۳)

مربوط به زوج و فرد یعنی $x + \sqrt{x^2 + 1}$

گزینه ۱: $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \stackrel{\text{مربوط به زوج و فرد یعنی } x + \sqrt{x^2 + 1}}{=} \ln \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dots = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \Rightarrow$ تابع فرد (۱) \checkmark

چون $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ پس $D_f = \mathbb{R}$ یعنی بازه متقارن است.

گزینه ۲: $f(x) = \sinh^{-1} x \Rightarrow$ تابع فرد (۱) \checkmark

گزینه ۳: $f(x) = \cosh^{-1} x$ تابع زوج و نه فرد

دستگیری لگاریتم: $x^y = e^{y \ln x}$

گزینه ۳: $f(x) = 3^x + 3^{-x} = e^{x \ln 3} + e^{-x \ln 3} = 2 \cosh(x \ln 3) \Rightarrow$ تابع زوج

گزینه ۴: $f(x) = 2x + |x| \Rightarrow$ زوج و نه فرد

مثال: معکوس تابع f با ضابطه $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}), a > 0, a \neq 1$ کدام است؟

مبدأ $f^{-1}(x) = \sinh(x \ln a)$ (۱)
 مبدأ $f^{-1}(x) = \cosh(ax)$ (۴)
 مبدأ $f^{-1}(x) = \cosh(x \ln a)$ (۳)

مبدأ: تابع f شبیه $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(۹۳ MBA)

مثال: معکوس تابع f با ضابطه $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}), a > 0, a \neq 1$ کدام است؟

مبدأ $f^{-1}(x) = \sinh(x \ln a)$ (۱)
 مبدأ $f^{-1}(x) = \cosh(ax)$ (۴)
 مبدأ $f^{-1}(x) = \cosh(x \ln a)$ (۳)

مبدأ: $f(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \sinh^{-1} x = y$ $\xrightarrow{\text{مبدأ } f^{-1}}$ $\sinh^{-1} x = y \ln a \Rightarrow x = \sinh(y \ln a)$

تعویض نقش: $y = \sinh(x \ln a) = f^{-1}(x)$ (۲) ✓

هدف: محاسبه f^{-1}

(کشاورزی ۹۱)

مثال: معکوس تابع $f(x) = 2^x - (\frac{1}{2})^x$ به صورت $f^{-1}(x) = \log_p u$ است، u کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ (۲) $\frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + 4})$ (۳) $x + \sqrt{x^2 + 4}$ (۴) $x - \sqrt{x^2 + 4}$

روش اول: $f(x) = y = 2^x - (\frac{1}{2})^x = 2^x - 2^{-x} \xrightarrow{\text{مبدأ } f^{-1}}$ $\frac{2^x}{t} - y \cdot \frac{2^x}{t} - 1 = 0$ (معادله درجه دوم بر حسب 2^x) $t = 2^x$

عقود منفی $\frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 + 4}) =$
 مثبت $\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4}) =$

$\Rightarrow t = 2^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$

$\Rightarrow 2^x = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4}) \xrightarrow{\text{مبدأ } f^{-1}}$ $x = \log_p \left(\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4}) \right) \xrightarrow{\text{تعویض نقش}} f^{-1}(x) = \log_p \left(\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4}) \right) = \log_p u$

$\Rightarrow u = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ (۱) ✓

روش ۲: $f(x) = 2^x - (\frac{1}{2})^x = 2^x - 2^{-x} = e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2} = 2 \sinh(x \ln 2) = y \xrightarrow{\text{روش } f^{-1}} \sinh(x \ln 2) = \frac{1}{2} y$

$x = e^{y \ln 2}$ و $y = e^{x \ln 2}$ $\Rightarrow x \ln 2 = \sinh^{-1}(\frac{y}{2}) = \ln(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}) = \ln(\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4})) \Rightarrow x = \frac{\ln(\dots)}{\ln 2} = \log_p(\frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 + 4}))$

تعویض نقش: $f^{-1}(x) = y = \log_p(\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})) = \log_p u \Rightarrow (1) \checkmark$

(۸۴ MBA)

مثال. دامنه تابع $f(x) = \tanh^{-1}(\tan \pi x)$ به صورت اجتماع کدام بازه‌ها است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}]$ (۴) $[k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}]$ (۳) $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})$ (۲) $(k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$ (۱)

\downarrow
tanh

محدودیت: $-1 < \tan(\pi x) < 1$ $\xrightarrow{\text{بین } \pm \frac{\pi}{4} \text{ باشد}}$ $\tan(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = -1 < \tan(\pi x) < 1 = \tan(\frac{\pi}{4} + k\pi)$

$\tan(\pi x) \Rightarrow \cos(\pi x) \neq 0$ تعریف نشده

\downarrow صعودی است \tan

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < \pi x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

\downarrow

$$k - \frac{1}{4} < x < k + \frac{1}{4} ; k \in \mathbb{Z}$$

دامنه: اجتماع بازه‌های $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})$ و $k \in \mathbb{Z}$ است. (۲)✓

مطالب تدریس شده در قسمت چهارم (آخر) ریاضی پایه

- صفحه ۳۳ الی ۳۵ از جلد اول کتاب ریاضی ۱

تکالیف:

- حل سوالات (مثال یا تست) صفحه های تدریس شده از جلد اول

مشاوره و رفع اشکال :

masoudaghasi1395@gmail.com

برنامه دوره های ریاضی عمومی و معادلات آنلاین برای کنکور ۱۴۰۳

برای ثبت نام در کلاسهای آنلاین (ویژه کنکور ۱۴۰۳) می توانید از لینک های زیر استفاده نمایید:

- کلاس درس و تست ۱۵+۱۰۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/da1403>
- کلاس نکته و تست ۵۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/te1403>
- جمع بندی ریاضی عمومی ۲۵ ساعتی (بر اساس باکس مطالب مشابه) <https://b2n.ir/mo1403>
- پکیج کلاس درس+نکته+جمع بندی ۱۹۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/pa1403>
- ویدیو و جزوه رایگان تدریس ریاضی پایه در ۱۵ ساعت <https://b2n.ir/ta1402>
- کلاس درس و تست ۵۰ ساعتی معادلات دیفرانسیل <https://b2n.ir/eq1403>
- ویدیو و جزوه درس و تست فشرده ۱۶+۵۰ ساعتی ریاضی عمومی <https://b2n.ir/fe1402>
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی (فاز اول) برای کنکور ۱۴۰۳ <https://b2n.ir/wb1403>
- وبینار رایگان روش بهینه مطالعه ریاضی (فاز ۲ و ۳) برای کنکور ۱۴۰۳ <https://b2n.ir/wbb1403>
- کارگاه رایگان حل تست جامع ریاضی (تستهای کنکور ۹۶ به بعد رشته های مختلف) <https://b2n.ir/ja1402>
- کارگاه رایگان تدریس اعداد مختلط (جلسه ۹ کلاس درس و تست) <https://b2n.ir/fm1402>

- ✓ پکیج ۱۹۰ ساعتی کاملترین دوره ریاضی عمومی است و تخفیف بالاتری نسبت به سایر دوره ها خواهد داشت.
- ✓ دوستانی که از دوره رایگان ریاضی پایه استفاده کرده اند، در صورت تمایل برای ثبت نام در هر یک از دوره های (درس، نکته، جمع بندی، پکیج) از کد تخفیف **PAYE10** استفاده نمایند تا از ۱۰٪ تخفیف اضافه تر بهره مند گردند.

توجه : در صورت بروز مشکل در استفاده از لینک های بالا، برای دریافت لینک فعال یا ثبت نام به صفحه اول سایت <https://negareh.ac.ir/aghasi> یا www.m-aghasi.ir یا کانال تلگرام [@math_admin77](https://t.me/math_admin77) مراجعه یا از طریق آیدی تلگرام [@math_admin77](https://t.me/math_admin77) یا ایمیل زیر پیگیری نمایید:

ایمیل برای مشاوره یا رفع اشکال : masoudaghasi1395@gmail.com